UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Nathawut Phandoidaen
Wintersemester 2019/2020

6. Übungsblatt – Lösungen

Aufgabe 21	Aufgabe 22	Aufgabe 23	Aufgabe 24	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 21 (Eigenschaften des Erwartungswertes, 4 = 2 + 1 + 1 Punkte).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

(a) Sei $X : \Omega \to \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ eine diskrete Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}X = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n). \tag{1}$$

Berechnen Sie damit den Erwartungswert einer geometrisch verteilten Zufallsvariable $X \sim \mathrm{Geo}(p)$ mit Parameter $p \in (0, 1)$.
Hinweis: Nutzen Sie ohne Beweis, dass für nichtnegative reelle Zahlen $a_{n,k}$ $(n, k \in \mathbb{N})$ gilt: $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}$.

(b) Falls X eine nichtnegative und stetig verteilte Zufallsvariable ist mit Verteilungsfunktion F_X, kann mit ähnlichen Mitteln wie in (a) gezeigt werden, dass

$$\mathbb{E}X = \int_0^{\infty} (1 - F_X(x))\mathrm{d}x. \tag{$*$}$$

Berechnen Sie mittels $(*)$ den Erwartungswert einer exponentialverteilten Zufallsvariable $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ mit Parameter $\lambda > 0$.

(c) Sei X eine reellwertige Zufallsvariable mit $\mathbb{E}[X^2] < \infty$. Zeigen Sie, dass $\mu = \mathbb{E}[X]$ die mittlere quadratische Abweichung $x \mapsto \mathbb{E}[(X - x)^2]$ minimiert.

Lösung:

(a) Für eine $\mathbb{N}$-wertige Zufallsvariable X gilt nach Vorlesung

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X &= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = n)\mathbb{1}_{\{k \leq n\}} \\ &\overset{\text{Hinweis}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = n)\mathbb{1}_{\{k \leq n\}} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq k).\end{aligned}$$

Für eine geometrisch verteilte Zufallsvariable $X \sim \text{Geo}(p)$ gilt nun

$$\mathbb{P}(X = k) = p \cdot (1-p)^{k-1}, \qquad k \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}.$$

Es folgt über die Formel gerade

$$\mathbb{P}(X \leq n-1) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X = k) = p \cdot \sum_{k=0}^{n-2} (1-p)^k = p \cdot \frac{1-(1-p)^{n-1}}{1-(1-p)} = 1 - (1-p)^{n-1},$$

d.h. $\mathbb{P}(X \geq n) = 1 - \mathbb{P}(X \leq n-1) = (1-p)^{n-1}$.
Damit erhalten wir

$$\mathbb{E}X = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n) = \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)^n = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}.$$

(b) Die Verteilungsfunktion von $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ lautet

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \qquad x \geq 0.$$

Damit folgt

$$\mathbb{E}X = \int_0^\infty (1 - F_X(x)) \mathrm{d}x = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \mathrm{d}x = \Big[-\frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda x} \Big]_0^\infty = \frac{1}{\lambda}.$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X-x)^2] &= \mathbb{E}[((X-\mu) + (\mu - x))^2] \\ &= \mathbb{E}[(X-\mu)^2] + 2\underbrace{\mathbb{E}[(X-\mu)\cdot(\mu-x)]}_{=(\mu-x)\cdot(\mathbb{E}X-\mu)=0} + \mathbb{E}[(\mu-x)^2] \\ &= \mathbb{E}[(X-\mu)^2] + (\mu-x)^2. \end{aligned}$$

Der erste Term hängt nicht von x ab. Der zweite Termin wird minimiert durch $x = \mu$. Also wird $\mathbb{E}[(X-x)^2]$ durch $x = \mu$ minimiert.

Aufgabe 22 (Berechnung von Erwartungswerten, 4 = 2 + 2 Punkte).
Lösen Sie in den folgenden Modellen die entsprechende Frage nach dem Erwartungswert:

(a) Sie haben $n \in \mathbb{N}$ Karten, auf denen die Zahlen von 1 bis n stehen. Die Karten werden gut gemischt und eine Karte aufgedeckt; diese bildet den Beginn des ersten Stapels. Zeigt die nächste aufgedeckte Karte eine größere Zahl, so wird ein neuer Stapel begonnen; anderenfalls legt man die Karte auf den ersten Stapel. Auf diese Weise fährt man fort, bis alle Karten aufgedeckt sind. Wie viele Stapel erwarten Sie am Ende im Mittel?
Hinweis: Berechnen Sie den Erwartungswert von $N = \sum_{i=1}^n X_i$, wobei $X_i = 1$, wenn ein neuer Stapel angefangen wird und $X_i = 0$, wenn kein neuer Stapel angelegt wird. Definieren Sie X_i mathematisch mithilfe der Zufallsvariablen Y_j, $j = 1, \ldots, i$, wobei Y_j die Zahl auf der j-ten Karte angibt.

(b) In einem Spiel ziehen Sie ohne Zurücklegen aus einer Urne mit $n \in \mathbb{N}$ von 1 bis n durchnummerierten Kugeln. Das Spiel ist beendet, sobald ein gezogener Wert kleiner ist als der zuvor gezogene Wert. Vor jedem Zug erhalten Sie einen Euro. Wie viel Euro werden Sie im Mittel erhalten?
Hinweis: Definieren Sie für $k = 1, ..., n$ Zufallsvariablen

$$X_k := \begin{cases} 1, & \text{„Sie dürfen den } k\text{-ten Zug durchführen“}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

und stellen Sie den Gewinn eines Spiels durch die X_k dar.

Lösung:

(a) Zunächst bezeichne Y_i die Zahl, die auf der i-ten gezogenen Karte steht.
Für $i = 1, ..., n$ definieren wir nun Zufallsvariablen

$$X_i = \begin{cases} 1, & Y_i = \max_{j=1,...,i} Y_j, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist für ein i also $X_i = 1$, erzwingt die i-te Karte einen neuen Stapel. Damit gilt für die Zufallsvariable N, welche die gesamte Anzahl der Stapel nach dem Experiment bezeichnen soll gerade

$$N = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Für den Erwartungswert folgt mit der Linearität des Erwartungswertes

$$\mathbb{E}N = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}X_i.$$

Wir müssen nun also den Erwartungswert von X_i bestimmen. Es gilt

$$\mathbb{E}X_i = \mathbb{P}(Y_i = \max_{j=1,...,i} Y_j).$$

Da alle Verteilungen der Zahlen $1, ..., n$ auf die $Y_1, ..., Y_n$ gleichwahrscheinlich sind, gilt das auch für $Y_1, ..., Y_i$. Daher beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass das fest ausgewählte Y_i die größte Zahl liefert, $1/i$. Wir erhalten

$$\mathbb{E}X_i = \frac{1}{i}$$

und damit

$$\mathbb{E}N = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

Für $n = 32$ ergibt sich beispielsweise $\mathbb{E}N \approx 4.06$.
Anmerkung: Es gilt $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x} \mathrm{d}x = 1 + \log(n)$, *womit man eine gute Abschätzung von* $\mathbb{E}N$ *nach oben hat.*

(b) Es sei X die Zufallsvariable, die den Gewinn in Euro bezeichnet. Es gilt

$$X = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Demzufolge ergibt sich

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}X_k = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k = 1).$$

Seien $Y_1, ..., Y_n$ die Nummern der gezogenen Kugeln. Da zufällig aus der Urne gezogen wird, ist jede Verteilung der Nummern $1, ..., n$ auf $Y_1, ..., Y_n$ gleichwahrscheinlich. Für $k = 1, ..., n$ lässt sich die Zufallsvariable X_k nun auch darstellen als

$$X_k = \begin{cases} 1, & Y_1 < Y_2 < ... < Y_{k-1}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Achtung: Es reicht bis Y_{k-1} zu gehen, da der k-te Zug ja schon durchgeführt werden darf, wenn bis zum $(k-1)$-ten Zug alles aufsteigend war.
Es gilt also

$$\mathbb{P}(X_k = 1) = \mathbb{P}(Y_1 < ... < Y_{k-1}).$$

Aufgrund der entsprechenden Eigenschaften für $Y_1, ..., Y_n$ sind auch alle möglichen Verteilungen der Nummern auf die $Y_1, ..., Y_{k-1}$ gleichwahrscheinlich. Da für die Berechnung der obigen Wahrscheinlichkeit nur die Reihenfolge und nicht die konkreten Werte der Y_i wichtig sind, können wir uns auf eine vereinfachte Berechnung zurückziehen:
Es gibt insgesamt $(k-1)!$ Möglichkeiten für die Anordnung der $Y_1, ..., Y_{k-1}$. Nur eine einzige davon aber gewährleistet $Y_1 < ... < Y_{k-1}$. Da alle Anordnungen die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen, gilt

$$\mathbb{P}(X_k = 1) = \mathbb{P}(Y_1 < ... < Y_{k-1}) = \frac{1}{(k-1)!}.$$

Damit folgt insgesamt

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \longrightarrow e \quad (n \longrightarrow \infty).$$

Aufgabe 23 (Jagende und Enten, 4 = 1.5 + 1.5 + 1 Punkte).

Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Eine Gruppe von n (perfekten) Jagenden schießt auf m Enten, wobei sich jeder Jagende sein Opfer zufällig und unabhängig von den anderen Jagenden auswählt. Insbesondere kann eine Ente also von mehreren Jagenden ausgewählt werden. Sei X die Anzahl der bei diesem Massaker überlebenden Enten.

(a) Berechnen Sie Erwartungswert von X.
Hinweis: Nummerieren Sie die Enten von 1 bis m und definieren dann Sie das Ereignis $A_i :=$ „Die i-te Ente überlebt“. Drücken Sie X durch die Zufallsvariablen $X_i := \mathbb{1}_{A_i}$ aus. Nutzen Sie dann die Linearität des Erwartungswerts und ermitteln Sie $\mathbb{E}X_i$.

(b) Berechnen Sie die Varianz von X.
Hinweis: Benutzen Sie die Formel $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$. *Nun müssen Sie sich Gedanken über den Erwartungswert* $\mathbb{E}[X_i X_j]$ *machen.*

(b) Sei nun $m = n = 50$. Nutzen Sie die Tschebyscheff-Ungleichung und die Ergebnisse aus (a), um ein Intervall $[m_1, m_2]$, $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, anzugeben, in dem mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% die Anzahl der überlebenden Enten liegt.

Lösung:

(a) Wir nutzen die Notationen aus dem Hinweis. Dann gilt

$$X = \sum_{i=1}^{m} X_i,$$

und die erwartete Anzahl an überlebenden Enten ist

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{m} X_i\Big] = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(A_i).$$

Um den Erwartungswert zu berechnen, müssen wir uns also Gedanken über die Wahrscheinlichkeit von A_i machen. Es ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_i) &= \mathbb{P}(\text{„}i\text{-te Ente überlebt“}) \\
&= \mathbb{P}(\text{„Kein/e Jagende/r schießt auf Ente } i\text{“}) \\
&= \mathbb{P}(\text{„Jagende 1 schießt nicht auf Ente } i\text{,..., Jagende } n \text{ schießt nicht auf Ente } i\text{“}) \\
&\overset{(*)}{=} \mathbb{P}(\text{„Jagende 1 schießt nicht auf Ente } i) \cdot ... \\
&\qquad ... \cdot \mathbb{P}(\text{„Jagende } n \text{ schießt nicht auf Ente } i\text{“})
\end{aligned}$$

Es gilt $(*)$, weil die/der Jagende unabhängig auf die Enten schießen
Die Jagenden wählen jede Ente mit gleicher Wahrscheinlichkeit als Ziel aus. Daher ist

$$\mathbb{P}(\text{„Jagende } j \text{ schießt nicht auf Ente } i\text{“}) = \frac{m-1}{m}.$$

Damit erhalten wir

$$\mathbb{P}(A_i) = \left(\frac{m-1}{m}\right)^n,$$

weswegen wir für die Anzahl an überlebenden Enten erwarten:

$$\mathbb{E}X = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{E}X_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{m-1}{m}\right)^n = m \cdot \left(\frac{m-1}{m}\right)^n.$$

(b) Für die Varianz nutzen wir die Formel $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$. Da $\mathbb{E}X$ bereits bekannt ist, ist nur noch $\mathbb{E}[X^2]$ zu berechnen. Es gilt wegen der Linearität des Erwartungswerts:

$$\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}\left[\sum_{i,j=1}^{m} X_i X_j\right] = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{E}[X_i^2] + \sum_{i,j=1, i\neq j}^{m} \mathbb{E}[X_i X_j].$$

Beachte, dass mit (a) gerade $\mathbb{E}[X_i^2] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_i}^2] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_i}] = \mathbb{P}(A_i) = \left(\frac{m-1}{m}\right)^n$ gilt.
Für $\mathbb{E}[X_i X_j] = \mathbb{P}(A_i \cap A_j)$ berechnen wir wie oben:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_i \cap A_j) &= \mathbb{P}(\text{„}i\text{-te Ente und } j\text{-te Ente überlebt“}) \\
&= \mathbb{P}(\text{„Kein/e Jagende/r schießt auf Enten } i, j\text{“}) \\
&= \mathbb{P}(\text{„Jagende 1 schießt nicht auf Enten } i, j, \\
&\qquad \text{..., Jagende } n \text{ schießt nicht auf Enten } i, j\text{“}) \\
&= \mathbb{P}(\text{„Jagende 1 schießt nicht auf Enten } i, j\text{“}) \cdot ... \\
&\qquad ... \cdot \mathbb{P}(\text{„Jagende } n \text{ schießt nicht auf Enten } i, j\text{“}) \\
&= \left(\frac{m-2}{m}\right)^n.
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$\mathbb{E}[X^2] = m \cdot \left(\frac{m-1}{m}\right)^n + m \cdot (m-1) \cdot \left(\frac{m-2}{m}\right)^n$$

Damit folgt

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = m \cdot \left(\frac{m-1}{m}\right)^n + m \cdot (m-1) \cdot \left(\frac{m-2}{m}\right)^n - \left(m \cdot \left(\frac{m-1}{m}\right)^n\right)^2.$$

(c) Für beliebiges $\varepsilon > 0$ gilt nach der Tschebyscheff-Ungleichung

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Durch das Bilden des Gegenereignisses erhalten wir

$$\mathbb{P}\Big(X \in (\mathbb{E}X - \varepsilon, \mathbb{E}X + \varepsilon)\Big) = \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Diese Ungleichung ist wie folgt zu interpretieren:
Mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $1 - \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}$ *liegt* X*, die Anzahl der überlebenden Enten, im Intervall* $(\mathbb{E}X - \varepsilon, \mathbb{E}X + \varepsilon)$.
Wir wollen erreichen, dass

$$1 - \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2} \geq 0.9 \quad \iff \quad 0.1 \geq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2} \quad \iff \quad \varepsilon \geq \sqrt{10\mathrm{Var}(X)}. \qquad (*)$$

Für $n = m = 50$ gilt

$$\mathbb{E}X \approx 18.21, \qquad \mathrm{Var}(X) \approx 4.88$$

Damit müssen wir gemäß $(*)$ gerade $\varepsilon \geq 6.99$ wählen. Wir erhalten das Intervall

$$(\mathbb{E}X - \varepsilon, \mathbb{E}X + \varepsilon) = (11.22, 25.20).$$

Entsprechend besitzt das Intervall $[11, 26]$ die gewünschten Eigenschaften aus der Aufgabenstellung. Mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% werden also zwischen 11 und 26 Enten überleben.

Aufgabe 24 (Erwartungswerte von transformierten ZVAs, 4 = 2 + 2 Punkte).
Berechnen Sie die Erwartungswerte in den folgenden Modellen mittels Satz 7.5 der Vorlesung.

(a) Wir betrachten einen Kreis mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung $(0, 0)$ und Radius 1. Nun wird ein Punkt Z auf der oberen Hälfte der Kreislinie zufällig ausgewählt, wobei jeder Punkt auf der oberen Hälfte der Kreislinie mit der gleichen Wahrscheinlichkeit in Frage kommt. Sei A die Fläche des Dreiecks, das von den Punkten $(0, 0)$, $(0, 1)$ und Z gebildet wird. Berechnen Sie den Erwartungswert und Varianz von A. *Hinweis: Stellen Sie* Z *in Polarkoordinaten dar. Sie können ohne Beweis benutzen, dass die Identität* $\cos(2\varphi) = 2\cos^2(\varphi) + 1$ *für alle* $\varphi \in [0, 2\pi)$ *gilt.*

(b) Auf dem Tisch liegt 1 Euro. Sie werfen nun n-mal eine Münze, die mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$ „Kopf“ zeigt. Für jedes Mal „Kopf“ wird der Geldbetrag auf dem Tisch verdoppelt. Sei X der Geldbetrag, der nach ihrem Experiment auf dem Tisch liegt. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von X.
Hinweis: Nutzen Sie zur Berechnung den binomischen Lehrsatz.

Lösung:

(a) Wir stellen Z dar als

$$Z = (\cos(\varphi), \sin(\varphi)),$$

wobei $\varphi \sim U[0, \pi]$.
Anmerkung: Wenn Z *gleichverteilt auf dem oberen Halbkreis, ist also der Winkel des Punkts gleichverteilt auf* $[0, \pi]$.
Die Dichte ist dementsprechend $f_\varphi(\varphi) = \frac{1}{\pi}\mathbb{1}_{[0,\pi]}(\varphi)$.

Die Grundseite des Dreiecks (Strecke zwischen $(0,0)$ und $(0,1)$) hat Länge 1. Die Höhe (also die Senkrechte von der Grundseite zu Z) ist entsprechend $|\cos(\varphi)|$. Damit beträgt die Fläche des Dreiecks

$$A(\varphi) = \frac{1}{2}|\cos(\varphi)|.$$

Für den Erwartungswert erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[A(\varphi)] &= \frac{1}{2}\mathbb{E}[|\cos(\varphi)|] = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |\cos(\varphi)| \cdot f_\varphi(\varphi)\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi |\cos(\varphi)|\mathrm{d}\varphi \\
&\overset{\text{Symmetrie}}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(\varphi)\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{\pi}\Big[\sin(\varphi)\Big]_0^{\pi/2} = \frac{1}{\pi}.
\end{aligned}$$

Weiterhin erhalten wir aus

$$\cos(2\varphi) = \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) = 2\cos^2(\varphi) - 1 \iff \cos^2(\varphi) = \frac{1}{2}(1+\cos(2\varphi))$$

gerade

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[A(\varphi)^2] &= \frac{1}{4}\mathbb{E}[\cos^2(\varphi)] = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}} \cos^2(\varphi) \cdot f_\varphi(\varphi)\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi \cos^2(\varphi)\mathrm{d}\varphi \\
&\overset{\text{Symmetrie}}{=} 2 \cdot \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1+\cos(2\varphi))\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{4\pi}\Big[\varphi + \frac{1}{2}\sin(2\varphi)\Big]_0^{\pi/2} = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\mathrm{Var}(A(\varphi)) = \mathbb{E}[A(\varphi)^2] - \mathbb{E}[A(\varphi)]^2 = \frac{1}{8} - \frac{1}{\pi^2}.$$

(b) Der Geldbetrag auf dem Tisch ist $X = 2^Y$, wobei $Y \sim Bin(n,p)$. Zu berechnen sind nun $\mathbb{E}X$ und $\mathrm{Var}(X)$. Es gilt mit der Dichte

$$p(k) = \mathbb{P}(Y=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

und dem Binomischen Lehrsatz, dass

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X &= \mathbb{E}[2^Y] = \sum_{k=0}^n 2^k \cdot p(k) = (1-p)^n \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{2p}{1-p}\right)^k \\
&= (1-p)^n \cdot \left(1 + \frac{2p}{1-p}\right)^n = ((1-p)+2p)^n = (1+p)^n.
\end{aligned}$$

Analog dazu berechnen wir

$$\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[2^{2Y}] = \mathbb{E}[4^Y] = (1+3p)^n.$$

Damit erhalten wir insgesamt

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = (1+3p)^n - (1+p)^{2n}.$$

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **28. November 2019, 11:00 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/ews-WS1920/index.html`