UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Einführung in die
Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Nathawut Phandoidaen
Wintersemester 2019/2020

6. Übungsblatt

Aufgabe 21	Aufgabe 22	Aufgabe 23	Aufgabe 24	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 21 (Eigenschaften des Erwartungswertes, 4 = 2 + 1 + 1 Punkte).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

(a) Sei $X : \Omega \to \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ eine diskrete Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}X = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n).$$

Berechnen Sie damit den Erwartungswert einer geometrisch verteilten Zufallsvariable $X \sim \text{Geo}(p)$ mit Parameter $p \in (0, 1)$.
Hinweis: Nutzen Sie ohne Beweis, dass für nichtnegative reelle Zahlen $a_{n,k}$ $(n, k \in \mathbb{N})$ gilt: $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}$.

(b) Falls X eine nichtnegative und stetig verteilte Zufallsvariable ist mit Verteilungsfunktion F_X, kann mit ähnlichen Mitteln wie in (a) gezeigt werden, dass

$$\mathbb{E}X = \int_0^{\infty} (1 - F_X(x))\mathrm{d}x. \qquad (*)$$

Berechnen Sie mittels $(*)$ den Erwartungswert einer exponentialverteilten Zufallsvariable $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ mit Parameter $\lambda > 0$.

(c) Sei X eine reellwertige Zufallsvariable mit $\mathbb{E}[X^2] < \infty$. Zeigen Sie, dass $\mu = \mathbb{E}[X]$ die mittlere quadratische Abweichung $x \mapsto \mathbb{E}[(X - x)^2]$ minimiert.

Aufgabe 22 (Berechnung von Erwartungswerten, 4 = 2 + 2 Punkte).
Lösen Sie in den folgenden Modellen die entsprechende Frage nach dem Erwartungswert:

(a) Sie haben $n \in \mathbb{N}$ Karten, auf denen die Zahlen von 1 bis n stehen. Die Karten werden gut gemischt und eine Karte aufgedeckt; diese bildet den Beginn des ersten Stapels. Zeigt die nächste aufgedeckte Karte eine größere Zahl, so wird ein neuer Stapel begonnen; anderenfalls legt man die Karte auf den ersten Stapel. Auf diese Weise fährt man fort, bis alle Karten aufgedeckt sind. Wie viele Stapel erwarten Sie am Ende im Mittel?
Hinweis: Berechnen Sie den Erwartungswert von $N = \sum_{i=1}^{n} X_i$, wobei $X_i = 1$, wenn ein neuer Stapel angefangen wird und $X_i = 0$, wenn kein neuer Stapel angelegt wird. Definieren Sie X_i mathematisch mithilfe der Zufallsvariablen Y_j, $j = 1, \ldots, i$, wobei Y_j die Zahl auf der j-ten Karte angibt.

(b) In einem Spiel ziehen Sie ohne Zurücklegen aus einer Urne mit $n \in \mathbb{N}$ von 1 bis n durchnummerierten Kugeln. Das Spiel ist beendet, sobald ein gezogener Wert kleiner ist als der zuvor gezogene Wert. Vor jedem Zug erhalten Sie einen Euro. Wie viel Euro werden Sie im Mittel erhalten?
Hinweis: Definieren Sie für $k = 1, ..., n$ Zufallsvariablen

$$X_k := \begin{cases} 1, & \textit{„Sie dürfen den } k\textit{-ten Zug durchführen“}, \\ 0, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

und stellen Sie den Gewinn eines Spiels durch die X_k dar.

Aufgabe 23 (Jagende und Enten, 4 = 1.5 + 1.5 + 1 Punkte).

Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Eine Gruppe von n (perfekten) Jagenden schießt auf m Enten, wobei sich jeder Jagende sein Opfer zufällig und unabhängig von den anderen Jagenden auswählt. Insbesondere kann eine Ente also von mehreren Jagenden ausgewählt werden. Sei X die Anzahl der bei diesem Massaker überlebenden Enten.

(a) Berechnen Sie Erwartungswert von X.
Hinweis: Nummerieren Sie die Enten von 1 bis m und definieren dann Sie das Ereignis $A_i :=$ „Die i-te Ente überlebt“. Drücken Sie X durch die Zufallsvariablen $X_i := \mathbb{1}_{A_i}$ aus. Nutzen Sie dann die Linearität des Erwartungswerts und ermitteln Sie $\mathbb{E}X_i$.

(b) Berechnen Sie die Varianz von X.
Hinweis: Benutzen Sie die Formel $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$. Nun müssen Sie sich Gedanken über den Erwartungswert $\mathbb{E}[X_i X_j]$ machen.

(c) Sei nun $m = n = 50$. Nutzen Sie die Tschebyscheff-Ungleichung und die Ergebnisse aus (a), um ein Intervall $[m_1, m_2]$, $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, anzugeben, in dem mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% die Anzahl der überlebenden Enten liegt.

Aufgabe 24 (Erwartungswerte von transformierten ZVAs, 4 = 2 + 2 Punkte).

Berechnen Sie die Erwartungswerte in den folgenden Modellen mittels Satz 7.5 der Vorlesung.

(a) Wir betrachten einen Kreis mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung $(0, 0)$ und Radius 1. Nun wird ein Punkt Z auf der oberen Hälfte der Kreislinie zufällig ausgewählt, wobei jeder Punkt auf der oberen Hälfte der Kreislinie mit der gleichen Wahrscheinlichkeit in Frage kommt. Sei A die Fläche des Dreiecks, das von den Punkten $(0, 0)$, $(0, 1)$ und Z gebildet wird. Berechnen Sie den Erwartungswert und Varianz von A. *Hinweis: Stellen Sie Z in Polarkoordinaten dar. Sie können ohne Beweis benutzen, dass die Identität $\cos(2\varphi) = 2\cos^2(\varphi) + 1$ für alle $\varphi \in [0, 2\pi)$ gilt.*

(b) Auf dem Tisch liegt 1 Euro. Sie werfen nun n-mal eine Münze, die mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$ „Kopf“ zeigt. Für jedes Mal „Kopf“ wird der Geldbetrag auf dem Tisch verdoppelt. Sei X der Geldbetrag, der nach ihrem Experiment auf dem Tisch liegt. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von X.
Hinweis: Nutzen Sie zur Berechnung den binomischen Lehrsatz.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **28. November 2019, 11:00 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/ews-WS1920/index.html`