UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Nathawut Phandoidaen
Wintersemester 2019/2020

5. Übungsblatt – Lösungen

Aufgabe 17	Aufgabe 18	Aufgabe 19	Aufgabe 20	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 17 (Beispiele für σ-Algebren, Erzeugendensysteme, 4 = 2 + 2 Punkte).
Sei Ω eine nichtleere Menge.

(a) Welche der folgenden Mengensysteme sind σ-Algebren über Ω? Geben Sie dazu einen Beweis oder ein Gegenbeispiel mit $\Omega = \mathbb{N}$ an.

(i) $\mathcal{A}_1 := \{A \subseteq \Omega : A \text{ endlich oder } A^c \text{ endlich}\}$

(ii) $\mathcal{A}_2 := \{A \subseteq \Omega : A \text{ abzählbar oder } A^c \text{ abzählbar}\}$

Hinweis: Nutzen Sie die de Morganschen Regeln und die Tatsache, dass die Vereinigung abzählbarer Mengen wieder abzählbar ist.

(b) Sei $\Omega = \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Borelsche σ-Algebra $\mathcal{B} := A(\mathcal{E})$ mit $\mathcal{E} = \{[c, d] : c, d \in \mathbb{R}\}$ von folgenden Mengensystemen $\mathcal{E}_i$ erzeugt wird, also $\mathcal{B} = A(\mathcal{E}_i)$ für $i = 1, 2$ mit

$$\mathcal{E}_1 = \{(a, b] : a < b\}, \quad \mathcal{E}_2 = \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$$

Hinweis: Zeigen Sie $\mathcal{E}_1 \subseteq A(\mathcal{E})$ und $\mathcal{E} \subseteq A(\mathcal{E}_1)$, dann folgt direkt $A(\mathcal{E}_1) = A(\mathcal{E}) = \mathcal{B}$.

Lösung:

(a) (i) Das System $\mathcal{A}_1$ ist im Allgemeinen keine σ-Algebra. Sei dazu $\Omega = \mathbb{N}$. Dann ist für alle $n \in \mathbb{N}$ die Menge $A_n := \{2n\}$ (einelementig) endlich, d.h. $A_n \in \mathcal{A}_1$. Aber $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$, die Menge der geraden Zahlen, ist eine unendliche Menge, und das Komplement

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c = \mathbb{N} \setminus \{2n : n \in \mathbb{N}\} = \{2n - 1 : n \in \mathbb{N}\},$$

die Menge der ungeraden Zahlen, ist ebenfalls unendlich. Damit ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \notin \mathcal{A}_1$, was im Widerspruch zur Definition einer σ-Algebra steht.

(ii) Das Mengensystem $\mathcal{A}_2$ ist eine σ-Algebra. Wir zeigen die drei Eigenschaften einer σ-Algebra über Ω.

(A1) Es ist $\Omega^c = \emptyset$ abzählbar. Daher ist $\Omega \in \mathcal{A}_2$.

(A2) Sei $A \in \mathcal{A}_2$.

- Sei A abzählbar. Dann ist $A = (A^c)^c$ abzählbar, d.h. $A^c \in \mathcal{A}_2$.
- Sei A^c abzählbar. Dann ist $A^c \in \mathcal{A}_2$.

(A3) Seien $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}_2$.

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: A_n ist abzählbar. Dann ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen wieder abzählbar, d.h. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}_2$.
- Es gibt ein $n' \in \mathbb{N}$, so dass $A_{n'}$ nicht abzählbar ist. Da $A_{n'} \in \mathcal{A}_2$, muss dann $A_{n'}^c$ abzählbar sein. Es folgt mit den de Morganschen Regeln, dass $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c$ abzählbar ist, da mindestens eine Menge im Durchschnitt enthalten ist, die nur abzählbar viele Elemente enthält. Es folgt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}_2$.

(b) Angenommen, wir haben $\mathcal{E}_1 \subseteq A(\mathcal{E})$ gezeigt. Weil $A(\mathcal{E}_1)$ die kleinste σ-Algebra ist, die $\mathcal{E}_1$ enthält und $A(\mathcal{E})$ eine σ-Algebra ist, muss $A(\mathcal{E}_1) \subseteq A(\mathcal{E})$ gelten.
Wir müssen also nur $\mathcal{E}_1 \subseteq A(\mathcal{E})$ und $\mathcal{E} \subseteq A(\mathcal{E}_1)$ zeigen, damit $A(\mathcal{E}_1) \subseteq A(\mathcal{E})$ und $A(\mathcal{E}) \subseteq A(\mathcal{E}_1)$ folgt, d.h. $A(\mathcal{E}_1) = A(\mathcal{E})$.

- $\mathcal{E}_1 \subseteq A(\mathcal{E})$: Das bedeutet, wir müssen ein beliebiges Element $(a,b] \in \mathcal{E}_1$ mit $a < b$ durch Elemente von $\mathcal{E}$ darstellen. Hier gilt

$$(a,b] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{[a+\frac{1}{n}, b]}_{\in\mathcal{E}} \in A(\mathcal{E}).$$

- $\mathcal{E} \subseteq A(\mathcal{E}_1)$: Sei $[c,d] \in \mathcal{E}$. Dann ist

$$[c,d] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{(c-\frac{1}{n}, d]}_{\in\mathcal{E}_1} \in A(\mathcal{E}_1)$$

  Beachte: Auch abzählbare Schnitte (nicht nur abzählbare Vereinigungen) sind wieder in der σ-Algebra enthalten, was direkt aus den de Morganschen Regeln folgt.

- $\mathcal{E}_2 \subseteq A(\mathcal{E})$: Sei $(-\infty, a] \in \mathcal{E}_2$. Dann gilt

$$(-\infty, a] = \bigcup_{-n\le a} \underbrace{[-n, a]}_{\in\mathcal{E}} \in A(\mathcal{E}).$$

- $\mathcal{E} \subseteq A(\mathcal{E}_2)$: Sei $[c,d] \in \mathcal{E}$. Dann gilt

$$(-\infty, c) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{(-\infty, c-\frac{1}{n}]}_{\in\mathcal{E}_2} \in A(\mathcal{E}_2),$$

  und daher

$$[c,d] = (-\infty, d] \setminus (-\infty, c) = (-\infty, d] \cap (-\infty, c)^c \in A(\mathcal{E}_2).$$

Anmerkung: Wenn man statt der obigen Vorgehensweise nur $\mathcal{E}_1 \subseteq A(\mathcal{E}_2)$, $\mathcal{E}_2 \subseteq A(\mathcal{E})$ und $\mathcal{E} \subseteq A(\mathcal{E}_1)$ zeigt, kommt man durch diesen Ringschluss mit drei Implikationen aus, und erhält als Resultat trotzdem $A(\mathcal{E}_1) = A(\mathcal{E}_2) = A(\mathcal{E}) = \mathcal{B}$.

Aufgabe 18 (Stetige Zufallsvariablen, 3 = 1 + 1 + 1 Punkte).

Sei $X \sim \text{Laplace}(\lambda)$ stetig Laplace-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$ und Dichte

$$f_X(x) = c_\lambda \cdot \exp(-\frac{|x|}{\lambda}).$$

Achtung: Die Verteilung entspricht nicht der diskreten Laplace-Verteilung.

(a) Bestimmen Sie die Konstante c_λ, so dass f_X eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

(b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von X.

(c) Berechnen Sie $\mathbb{P}(X = 0)$, $\mathbb{P}(X > 2)$ und $\mathbb{P}(-1 \leq X \leq 1)$.

Lösung:

(a) Bestimmung von c_λ mittels

$$\begin{aligned} 1 = \int_{\mathbb{R}} f_X(x)\mathrm{d}x &= c_\lambda \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{|x|}{\lambda})\mathrm{d}x = 2c_\lambda \cdot \int_0^{\infty} \exp(-x/\lambda)\mathrm{d}x \\ &= 2c_\lambda \cdot \Big[-\lambda \cdot \exp(-x/\lambda)\Big]_0^{\infty} = 2c_\lambda \cdot \lambda. \end{aligned}$$

Damit ist $c_\lambda = \frac{1}{2\lambda}$. Offensichtlich gilt dann auch $f \geq 0$.

(b) Es ist wegen dem Betrag in der Dichte ratsam, $F_X(x)$ für die Fälle $x \leq 0$ und $x > 0$ separat zu berechnen.

- Für $x \leq 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\mathrm{d}y &= c_\lambda \int_{-\infty}^{x} \exp(y/\lambda)\mathrm{d}y = c_\lambda \Big[\lambda \exp(y/\lambda)\Big]_{-\infty}^{x} \\ &= c_\lambda \cdot \lambda \exp(x/\lambda) = \frac{1}{2}\exp(x/\lambda), \end{aligned}$$

- Für $x > 0$ und $F_X(0) = \frac{1}{2}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\mathrm{d}y &= \frac{1}{2} + c_\lambda \int_0^{x} \exp(-y/\lambda)\mathrm{d}y = \frac{1}{2} + c_\lambda \Big[-\lambda \exp(-y/\lambda)\Big]_0^{x} \\ &= 1 - \frac{1}{2}\exp(-x/\lambda). \end{aligned}$$

(c) Da X stetig verteilt ist, gilt $\mathbb{P}(X = 0) = 0$. Die anderen Wahrscheinlichkeiten können mit der Verteilungsfunktion berechnet werden:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > 2) &= 1 - \mathbb{P}(X \leq 2) = 1 - F_X(2) = 1 - \Big(1 - \frac{1}{2}\exp(-2/\lambda)\Big) = \frac{1}{2}\exp(-2/\lambda), \\ \mathbb{P}(-1 \leq X \leq 1) &= F_X(1) - F_X(-1) = \Big(1 - \frac{1}{2}\exp(-1/\lambda)\Big) - \Big(\frac{1}{2}\exp(-1/\lambda)\Big) \\ &= 1 - \exp(-1/\lambda). \end{aligned}$$

Aufgabe 19 (Inversionsmethode, 5 = 1.5 + 1.5 + 1 + 1 Punkte).

Diese Aufgabe beschäftigt sich damit, wie Realisierungen von stetig verteilten Zufallsvariablen auf dem Computer erzeugt werden. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine stetig verteilte Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$.

(a) Zeigen Sie: Hat X eine stetige, überall positive Dichte f, so gilt $Y := F(X) \sim U[0,1]$.

(b) Sei $F^*(y) := \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq y\}$. Zeigen Sie, dass für alle $y \in [0,1], z \in \mathbb{R}$ gilt: $F^*(y) \leq z \iff y \leq F(z)$.
Hinweis: Zeigen Sie mittels der rechtsseitigen Stetigkeit von F, dass $F(F^*(y)) \geq y$ gilt.

(c) Zeigen Sie: Ist $Y \sim U[0,1]$, dann hat $F^*(Y)$ dieselbe Verteilung wie X.

Wir nehmen an, dass F stetig und streng monoton wachsend auf $D_F := F^{-1}((0,1))$ ist. In diesem Fall gilt $F^* = F^{-1}$ auf dem offenen Intervall $(0,1)$, wobei F^{-1} die Umkehrfunktion von $F : D_F \to (0,1)$ bezeichnet.

(d) Sei $\lambda > 0$. Auf einem Computer können nur Realisierungen einer $U[0,1]$-verteilten Zufallsvariable Y erzeugt werden. Geben Sie eine Funktion $G : [0,1] \to \mathbb{R}$ an, so dass Sie durch $G(Y)$ Realisierungen einer $\text{Exp}(\lambda)$-verteilten Zufallsvariable erhalten.

Lösung:

(a) Wir benutzen Satz 6.16. Per Definition gilt $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\mathrm{d}y$. Da f stetig ist, ist F nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung stetig differenzierbar. Da $f > 0$ überall, ist $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ streng monoton wachsend und besitzt daher eine Umkehrfunktion $F^{-1} : [0,1] \to \mathbb{R}$. Dann gilt für die Dichte f_Y von Y für $y \in [0,1]$:

$$f_Y(y) = f(F^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{\partial}{\partial y} F^{-1}(y) \right|. \qquad (*)$$

Nach dem Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion und $F'(x) = f(x)$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial y} F^{-1}(y) = \frac{1}{F'(F^{-1}(y))} = \frac{1}{f(F^{-1}(y))} \geq 0.$$

Eingesetzt in $(*)$ folgt für $y \in [0,1]$:

$$f_Y(y) = f(F^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{\partial}{\partial y} F^{-1}(y) \right| = 1.$$

Da offensichtlich $F(X) \in [0,1]$ gilt, ist $f_Y(y) = 0$ für $y \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$. Insgesamt erhalten wir

$$f_Y(y) = \mathbb{1}_{[0,1]}(y),$$

was die Dichte einer Gleichverteilung auf $[0,1]$ darstellt, also $Y \sim U[0,1]$.

(b) Sei $y \in [0,1]$ beliebig. Sei $F^*(y) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq y\}$. Nach Definition des Infimums gibt es eine monoton fallende Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \downarrow F^*(y)$ und $F(x_n) \geq y$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen der Rechtsstetigkeit von F gilt

$$y \leq F(x_n) \to F(F^*(y)),$$

also

$$y \leq F(F^*(y)). \qquad (**)$$

Sei nun $z \in \mathbb{R}$ beliebig.

- Gelte $F^*(y) \leq z$. Da F monoton wachsend ist, folgt $y \overset{(**)}{\leq} F(F^*(y)) \leq F(z)$.
- Gelte $y \leq F(z)$. Dann ist z in der Menge $\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq y\}$, über die bei F^* das Infimum gebildet wird. Also gilt sicher $F^*(y) \leq z$.

(c) Für die Verteilungsfunktion von $F^*(Y)$ erhalten wir:

$$\mathbb{P}(F^*(Y) \le z) \overset{(b)}{=} \mathbb{P}(Y \le F(z)) \overset{Y\sim U[0,1]}{=} \int_0^{F(z)} \mathrm{d}x = F(z).$$

Damit haben $F^*(Y)$ und X die gleiche Verteilungsfunktion, weswegen die beiden Zufallsvariablen dieselbe Verteilung besitzen.

(d) *Anmerkung: Da F streng monoton wachsend auf $F^{-1}((0,1))$ ist, ist die auf den Bildbereich eingeschränkte Funktion $F : \mathbb{R} \to F(\mathbb{R})$ bijektiv und besitzt eine Umkehrfunktion F^{-1}. Weil F eine Verteilungsfunktion ist, gilt $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$, weswegen zusammen mit der angenommenen Stetigkeit sicher $(0,1) \subseteq F(\mathbb{R})$ gilt.*

Für eine exponentialverteilte Zufallsvariable $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ lautet die Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-\lambda x), & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Hier ist $D_F = F^{-1}((0,1)) = (0,\infty)$. Wegen $y = 1 - e^{-\lambda x} \iff e^{-\lambda x} = 1 - y \iff -\lambda x = \ln(1-y) \iff x = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-y)$ ist die Umkehrfunktion von $F : D_F \to (0,1)$ gegeben über

$$F^{-1}(y) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-y).$$

In Hinsicht auf (b) definieren wir

$$G(y) := \begin{cases} -\frac{1}{\lambda}\ln(1-y), & y \in (0,1), \\ 0, & y \in \{0,1\}. \end{cases}$$

Nach dem Hinweis gilt $F^* = F^{-1}$ auf $(0,1)$ und damit hat $F^*(Y) = F^{-1}(Y) = G(Y)$ dieselbe Verteilung wie X.

Beachte: Das Verhalten von F^* bzw. F^{-1} bzw. G an den Werten 0 und 1 ist nicht von Belang, da Y stetig verteilt ist und damit die Werte $Y = 0$ oder $Y = 1$ nur mit Wahrscheinlichkeit 0 auftreten.
Formal könnte argumentiert werden, dass für die Verteilungsfunktion von $G(Y)$ gerade

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(G(Y) \le z) &= \mathbb{P}(G(Y) \le z, Y \in (0,1)) \\ &= \mathbb{P}(F^*(Y) \le z, Y \in (0,1)) = \mathbb{P}(F^*(Y) \le z) = F(z), \end{aligned}$$

gilt. Daher besitzen $G(Y)$ und X dieselbe Verteilungsfunktion; also dieselbe Verteilung.

Aufgabe 20 (Neyman-Pearson-Lemma für stetige Verteilungen, 4 = 2 + 1 + 1 Punkte).

Wir untersuchen die Leuchtdauer einer Glühbirne. Die vom Hersteller angegebene Leuchtdauer bis zum Durchbrennen beträgt $\lambda_0 = 2.0$ Kilostunden. In einem Experiment beobachten wir eine Leuchtdauer von nur $X = 1.05$ Kilostunden.
Wir nehmen an, dass die Leuchtdauer (in Kilostunden) Pareto-verteilt ist mit Parameter $\frac{1}{\lambda}$, $\lambda > 0$, d.h. $X \sim \mathrm{Pareto}(\frac{1}{\lambda}) =: \mathbb{P}_\lambda$, wobei die Dichte dieser Verteilung gegeben ist durch

$$f_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda} x^{-(\frac{1}{\lambda}+1)} \mathbb{1}_{\{x\ge 1\}}.$$

Wir wollen basierend auf unserem Experiment nachweisen, dass die wahre Leuchtdauer kleiner als die vom Hersteller angegebene ist.

(a) Sei zunächst $\lambda_1 < \lambda_0$ fest gewählt.
Formulieren Sie den Neyman-Pearson-Test $\phi^* : \mathbb{R} \to \{H_0, H_A\}$ aus Satz 6.18 für die $\mathbb{P}_\lambda$-Verteilung zu den Hypothesen

$$H_0 : \lambda = \lambda_0 \quad \text{gegen} \quad H_A : \lambda = \lambda_1$$

zum Niveau $\alpha \in (0,1)$. Vereinfachen Sie dann diesen Test mittels der Technik der monotonen Dichte-Quotienten.

(b) Begründen Sie, warum ϕ^* aus (a) auch ein gleichmäßig bester Test zum Niveau α für die Hypothesen $H_0 : \lambda = \lambda_0$ gegen $H_A' : \lambda < \lambda_0$ ist.

(c) Wir wollen den peinlichen Fehler, den Hersteller zu Unrecht zu beschuldigen, nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% begehen. Werden wir uns auf Basis unserer Beobachtung X und dem Test ϕ^* dafür entscheiden, den Hersteller zu beschuldigen, die Leuchtdauer falsch anzugeben?

Lösung:

(a) Wir untersuchen Verteilungen $\mathbb{P}_\lambda = \text{Pareto}(\frac{1}{\lambda})$ mit Dichten $f_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda} x^{-(\frac{1}{\lambda}+1)} \mathbb{1}_{\{x \geq 1\}}$.
Laut dem Neyman-Pearson-Lemma 6.18 lautet der Neyman-Pearson-Test zum Niveau $\alpha \in (0,1)$ für die Hypothesen $H_0 : \lambda = \lambda_0$ gegen $H_A : \lambda = \lambda_1$:

$$\phi^* : \mathbb{R} \to \{0,1\}, \quad \phi^*(x) = \begin{cases} 1, & L(x) \geq c^*, \\ 0, & L(x) < c^*, \end{cases}$$

wobei $L(x) := \frac{f_{\lambda_1}(x)}{f_{\lambda_0}(x)}$ der Likelihood-Quotient ist und $\mathbb{P}_{\lambda_0}(\phi^* = 1) = \alpha$ gelten muss. Hier haben wir für $x \geq 1$ entsprechend

$$L(x) = \frac{f_{\lambda_1}(x)}{f_{\lambda_0}(x)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \cdot x^{\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_1}}.$$

Da $0 < \lambda_1 < \lambda_0$, ist $\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_1} < 0$, d.h. der Likelihoodquotient $L(x)$ ist monoton fallend in x und der Test vereinfacht sich zu

$$\phi^* : \mathbb{R} \to \{0,1\}, \quad \phi^*(x) = \begin{cases} 1, & x \leq c^*, \\ 0, & x > c^*, \end{cases} \tag{$*$}$$

mit

$$\alpha = \mathbb{P}_{\lambda_0}(\phi^* = 1) = \mathbb{P}_{\lambda_0}(\{x \leq c^*\}) = \mathbb{P}_{\lambda_0}((-\infty, c^*]) = F_{\lambda_0}(c^*),$$

wobei $F_\lambda(x) = \left(1 - x^{-\frac{1}{\lambda}}\right) \mathbb{1}_{\{x \geq 1\}}$ die Verteilungsfunktion der Paretoverteilung mit Parameter λ ist. Da für $c^* \leq 1$ offensichtlich keine Lösung existiert, nehmen wir $c^* > 1$ an und finden damit die Lösung

$$\alpha = 1 - (c^*)^{-\frac{1}{\lambda_0}} \iff c^* = (1-\alpha)^{-\lambda_0} \tag{$**$}$$

(b) Wie man an $(*)$ und $(**)$ sieht, hängt der gesamte Test ϕ^* nicht von der konkreten Wahl von $\lambda_1 < \lambda_0$ ab. Für jedes $\lambda_1 < \lambda_0$ und Hypothesen

$$H_0 : \lambda = \lambda_0 \quad \text{gegen} \quad H_A : \lambda = \lambda_1$$

erhalten wir also denselben Test ϕ^* mit der Optimalitätsaussage: „ϕ^* minimiert den Fehler 2. Art $\mathbb{P}_{\lambda_1}(\phi = 0)$ unter allen Tests ϕ mit Fehler 1. Art $\mathbb{P}_{\lambda_0}(\phi^* = 1)$.“
Damit ist ϕ^* gleichmäßig bester Test für die Hypothesen

$$H_0 : \lambda = \lambda_0 \quad \text{gegen} \quad H_A' : \lambda < \lambda_0.$$

(c) Mit der Bemerkung über den peinlichen Fehler wird ein Niveau $\alpha = 0.05$ für den Fehler 1. Art vorgegeben (die Hypothesen wurden in der Aufgabenstellung (a) schon richtig herum definiert, damit der peinliche Fehler wirklich dem Fehler 1. Art entspricht).
Wir erhalten damit

$$c^* = (1-\alpha)^{-\lambda_0} \approx 1.11.$$

Das bedeutet, der Test ϕ^* liefert für die Beobachtung $X = 1.05$ dann $\phi^*(X) = 1$. Das bedeutet, der Test verwirft die Nullhypothese $\lambda = \lambda_0$. Auf Basis des Tests ϕ^* zum Niveau $\alpha = 0.05$ und unserer Beobachtung X sollten wir den Hersteller beschuldigen.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **21. November 2019, 11:00 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/ews-WS1920/index.html`