UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

**Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik**
Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Nathawut Phandoidaen
Wintersemester 2019/2020

# 5. Übungsblatt

| Aufgabe 17 | Aufgabe 18 | Aufgabe 19 | Aufgabe 20 | Summe: |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

**Aufgabe 17 (Beispiele für $\sigma$-Algebren, Erzeugendensysteme, 4 = 2 + 2 Punkte).**
Sei $\Omega$ eine nichtleere Menge.

(a) Welche der folgenden Mengensysteme sind $\sigma$-Algebren über $\Omega$? Geben Sie dazu einen Beweis oder ein Gegenbeispiel mit $\Omega = \mathbb{N}$ an.

(i) $\mathcal{A}_1 := \{A \subseteq \Omega : A \text{ endlich oder } A^c \text{ endlich}\}$

(ii) $\mathcal{A}_2 := \{A \subseteq \Omega : A \text{ abzählbar oder } A^c \text{ abzählbar}\}$

*Hinweis: Nutzen Sie die de Morganschen Regeln und die Tatsache, dass die Vereinigung abzählbarer Mengen wieder abzählbar ist.*

(b) Sei $\Omega = \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Borelsche $\sigma$-Algebra $\mathcal{B} := A(\mathcal{E})$ mit $\mathcal{E} = \{[c,d] : c, d \in \mathbb{R}\}$ von folgenden Mengensystemen $\mathcal{E}_i$ erzeugt wird, also $\mathcal{B} = A(\mathcal{E}_i)$ für $i = 1, 2$ mit

$$\mathcal{E}_1 = \{(a,b] : a < b\}, \quad \mathcal{E}_2 = \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$$

*Hinweis: Zeigen Sie $\mathcal{E}_1 \subseteq A(\mathcal{E})$ und $\mathcal{E} \subseteq A(\mathcal{E}_1)$, dann folgt direkt $A(\mathcal{E}_1) = A(\mathcal{E}) = \mathcal{B}$.*

**Aufgabe 18 (Stetige Zufallsvariablen, 3 = 1 + 1 + 1 Punkte).**
Sei $X \sim \text{Laplace}(\lambda)$ stetig Laplace-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$ und Dichte

$$f_X(x) = c_\lambda \cdot \exp\left(-\frac{|x|}{\lambda}\right).$$

*Achtung: Die Verteilung entspricht nicht der diskreten Laplace-Verteilung.*

(a) Bestimmen Sie die Konstante $c_\lambda$, so dass $f_X$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

(b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von $X$.

(c) Berechnen Sie $\mathbb{P}(X = 0)$, $\mathbb{P}(X > 2)$ und $\mathbb{P}(-1 \leq X \leq 1)$.

**Aufgabe 19 (Inversionsmethode, 5 = 1.5 + 1.5 + 1 + 1 Punkte).**

Diese Aufgabe beschäftigt sich damit, wie Realisierungen von stetig verteilten Zufallsvariablen auf dem Computer erzeugt werden. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine stetig verteilte Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$.

(a) Zeigen Sie: Hat $X$ eine stetige, überall positive Dichte $f$, so gilt $Y := F(X) \sim U[0, 1]$.

(b) Sei $F^*(y) := \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq y\}$. Zeigen Sie, dass für alle $y \in [0, 1], z \in \mathbb{R}$ gilt: $F^*(y) \leq z \iff y \leq F(z)$.
*Hinweis: Zeigen Sie mittels der rechtsseitigen Stetigkeit von $F$, dass $F(F^*(y)) \geq y$ gilt.*

(c) Zeigen Sie: Ist $Y \sim U[0, 1]$, dann hat $F^*(Y)$ dieselbe Verteilung wie $X$.

Wir nehmen an, dass $F$ stetig und streng monoton wachsend auf $D_F := F^{-1}((0, 1))$ ist. In diesem Fall gilt $F^* = F^{-1}$ auf dem offenen Intervall $(0, 1)$, wobei $F^{-1}$ die Umkehrfunktion von $F : D_F \to (0, 1)$ bezeichnet.

(d) Sei $\lambda > 0$. Auf einem Computer können nur Realisierungen einer $U[0, 1]$-verteilten Zufallsvariable $Y$ erzeugt werden. Geben Sie eine Funktion $G : [0, 1] \to \mathbb{R}$ an, so dass Sie durch $G(Y)$ Realisierungen einer $\mathrm{Exp}(\lambda)$-verteilten Zufallsvariable erhalten.

**Aufgabe 20 (Neyman-Pearson-Lemma für stetige Verteilungen, 4 = 2 + 1 + 1 Punkte).**

Wir untersuchen die Leuchtdauer einer Glühbirne. Die vom Hersteller angegebene Leuchtdauer bis zum Durchbrennen beträgt $\lambda_0 = 2.0$ Kilostunden. In einem Experiment beobachten wir eine Leuchtdauer von nur $X = 1.05$ Kilostunden.
Wir nehmen an, dass die Leuchtdauer (in Kilostunden) Pareto-verteilt ist mit Parameter $\frac{1}{\lambda}$, $\lambda > 0$, d.h. $X \sim \mathrm{Pareto}(\frac{1}{\lambda}) =: \mathbb{P}_\lambda$, wobei die Dichte dieser Verteilung gegeben ist durch

$$f_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda} x^{-(\frac{1}{\lambda}+1)} \mathbb{1}_{\{x \geq 1\}}.$$

Wir wollen basierend auf unserem Experiment nachweisen, dass die wahre Leuchtdauer kleiner als die vom Hersteller angegebene ist.

(a) Sei zunächst $\lambda_1 < \lambda_0$ fest gewählt.
Formulieren Sie den Neyman-Pearson-Test $\phi^* : \mathbb{R} \to \{H_0, H_A\}$ aus Satz 6.18 für die $\mathbb{P}_\lambda$-Verteilung zu den Hypothesen

$$H_0 : \lambda = \lambda_0 \quad \text{gegen} \quad H_A : \lambda = \lambda_1$$

zum Niveau $\alpha \in (0, 1)$. Vereinfachen Sie dann diesen Test mittels der Technik der monotonen Dichte-Quotienten.

(b) Begründen Sie, warum $\phi^*$ aus (a) auch ein gleichmäßig bester Test zum Niveau $\alpha$ für die Hypothesen $H_0 : \lambda = \lambda_0$ gegen $H'_A : \lambda < \lambda_0$ ist.

(c) Wir wollen den peinlichen Fehler, den Hersteller zu Unrecht zu beschuldigen, nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% begehen. Werden wir uns auf Basis unserer Beobachtung $X$ und dem Test $\phi^*$ dafür entscheiden, den Hersteller zu beschuldigen, die Leuchtdauer falsch anzugeben?

---

**Abgabe:**
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **21. November 2019, 11:00 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

**Homepage der Vorlesung:**
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/ews-WS1920/index.html`