UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Nathawut Phandoidaen
Wintersemester 2019/2020

4. Übungsblatt – Lösungen

Aufgabe 13	Aufgabe 14	Aufgabe 15	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 13 (Eigenschaften einer Verteilungsfunktion, 6 = 1 + 2 + 1 + 2 Punkte). Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine diskrete Zufallsvariable. Die Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei mit $F(x) := \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\})$ bezeichnet. Zeigen Sie:

(a) F ist monoton wachsend, d.h. für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ gilt: $x_1 \leq x_2 \implies F(x_1) \leq F(x_2)$.

(b) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$

(c) F ist rechtsseitig stetig, d.h. für jede monoton fallende Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit $x_n \downarrow x$, $x \in \mathbb{R}$, gilt $F(x_n) \to F(x)$, $n \to \infty$.

Es kann gezeigt werden, dass F linksseitige Grenzwerte besitzt, d.h. für eine monoton wachsende Folge reeller Zahlen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit $x_n \uparrow x$, $x \in \mathbb{R}$, gilt $F(x_n) \to \mathbb{P}(X < x)$.

(d) Zeigen Sie, dass F höchstens abzählbar unendlich viele Sprungstellen (bzw. Unstetigkeitsstellen) besitzt.

Hinweis zu (b) und (c): Verwenden Sie die Aussage von Aufgabe 1(c) auf dem 1. Übungsblatt, indem Sie geeignete Mengenfolgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definieren. Bei (b) dürfen Sie die geeignete De Morgansche Regel aus Aufgabe P1 der Präsenzübungen 1 verwenden.

Lösung:

(a) Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 \leq x_2$. Dann gilt offensichtlich

$$\{X \leq x_1\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x_1\} \subseteq \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x_2\} = \{X \leq x_2\},$$

weswegen $F(x_1) = \mathbb{P}(X \leq x_1) \leq \mathbb{P}(X \leq x_2) = F(x_2)$.

(b) Wir müssen die zu zeigenden Aussagen für Wahrscheinlichkeitsmaße mit Folgen von Mengen übertragen.

- $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$:
  Es genügt zu zeigen, dass jede *monoton wachsende* Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen mit $x_n \to \infty$, $F(x_n) \to 1$ erfüllt.
  Die Mengen $A_n := \{X \leq x_n\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x_n\}$ bilden eine aufsteigende Folge von Elementen in $\mathcal{A}$, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $A_n \subseteq A_{n+1}$. Außerdem ist

  $$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x_n\} = \{\omega \in \Omega : \exists\, n \in \mathbb{N} : X(\omega) \leq x_n\} \overset{x_n\to\infty, X:\Omega\to\mathbb{R}}{=} \Omega.$$

  Nach dem 1. Übungsblatt 1, Aufgabe 1(c) gilt dann

  $$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X \leq x_n) = \lim_{n\to\infty} F(x_n).$$

  Analytischer Zusatz: Ist (x_n) eine Folge mit $x_n \to \infty$, so gibt es eine monoton wachsende Teilfolge (x_{n_k}). Wird dann für diese das Resultat $F(x_{n_k}) \to 1$ gezeigt, so folgt wegen der Monotonie von F und der Beschränktheit nach oben durch 1 auch $F(x_n) \to 1$, denn:
  Sei $\varepsilon > 0$ und $k_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass $F(x_{n_{k_0}}) \geq 1 - \varepsilon$ gilt. Wegen $x_n \to \infty$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$, $x_n \geq x_{n_{k_0}}$ gilt. Wegen der Monotonie folgt $F(x_n) \geq F(x_{n_{k_0}}) \geq 1 - \varepsilon$.
- $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$:
  Es genügt wie oben zu zeigen, dass jede *monoton fallende* Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen mit $x_n \to -\infty$, $F(x_n) \to 0$ erfüllt.
  Wir definieren $A_n := \{X_n \leq x_n\}$, diese bilden eine absteigende Folge von Elementen in $\mathcal{A}$, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $A_{n+1} \subseteq A_n$. Außerdem ist

  $$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x_n\} = \{\omega \in \Omega : \forall\, n \in \mathbb{N} : X(\omega) \leq x_n\} \overset{x_n\to-\infty, X:\Omega\to\mathbb{R}}{=} \emptyset.$$

  Wir nutzen nun eine Abwandlung der Aussage vom 1. Übungsblatt 1, Aufgabe 1(c) mit Hilfe der de Morganschen Regeln (die Stetigkeit des Maßes von oben; siehe auch Präsenzübungen 1 P1(d)). Es gilt nun $A_n^c \subseteq A_{n+1}^c$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit erhalten wir

  $$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \overset{\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c}{=} 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c\right) \\ &= 1 - \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n^c) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n\to\infty} F(x_n). \end{aligned}$$

(c) Wir gehen vor wie bei dem Fall $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$.
Definiere $A_n := \{X \leq x_n\}$, diese Folge erfüllt für alle $n \in \mathbb{N}$: $A_{n+1} \subseteq A_n$ bzw. $A_n^c \subseteq A_{n+1}^c$. Außerdem ist

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{\omega \in \Omega : \forall n \in \mathbb{N} : X(\omega) \leq x_n\} \overset{x_n \downarrow x}{=} \{\omega \in \Omega : \forall n \in \mathbb{N} : X(\omega) \leq x\}.$$

Die Teilmengenrelation $\supseteq$ für das letzte Gleichheitszeichen ist wegen $x_n \geq x$ für alle $n \in \mathbb{N}$ offensichtlich. Die Teilmengenrelation $\subseteq$ ist erfüllt, da durch die Limesbildung auf beiden Seiten aus $X(\omega) \leq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $X(\omega) \leq x$ folgt.
Damit haben wir, wie zuvor, mit dem 1. Übungsblatt, Aufgabe 1(c)

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n\to\infty} F(x_n).$$

(d) Sei $\{x_i\}_{i\in I}$ die Menge der Sprungstellen/ Unstetigkeitsstellen von F. An jeder Unstetigkeitsstelle x_i existiert der rechtsseitige Limes $F(x_i) = \lim_{x\downarrow x_i} F(x) < \infty$, da F rechtsseitig stetig ist. Weiterhin wissen wir, dass auch der linksseitige Limes $\lim_{x\uparrow x_i} F(x) < \infty$ existiert, und es gilt aufgrund der Monotonie

$$\lim_{x\uparrow x_i} F(x) < \lim_{x\downarrow x_i} F(x).$$

- *Möglichkeit 1*: Jeder Unstetigkeitsstelle x_i von F können wir das offene Intervall

  $$S_i := \left(\lim_{x\uparrow x_i} F(x), \lim_{x\downarrow x_i} F(x)\right) \neq \emptyset$$

  zuordnen. Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, gibt es eine rationale Zahl $q_i \in \mathbb{Q} \cap S_i$. Da F monoton wächst, sind die S_i disjunkt. Es ist also $\{x_i\}_{i\in I} \to \mathbb{Q}, x_i \mapsto q_i$ eine injektive Abbildung. Da $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, muss auch $\{x_i\}_{i\in I}$ abzählbar sein.
- *Möglichkeit 2*: Jeder Unstetigkeitsstelle x_i von F können wir eindeutig eine „Sprunghöhe“

  $$h(x_i) := \lim_{x\downarrow x_i} F(x) - \lim_{x\uparrow x_i} F(x) > 0 \qquad (*)$$

  zuordnen.
  Wir betrachten nun die Menge

  $$S_n := \left\{x \in \{x_i\}_{i\in I} : h(x) > \frac{1}{n}\right\}.$$

  Da eine Verteilungsfunktion $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ erfüllt und F monoton wächst, folgt $0 \leq F \leq 1$ überall. Weil F monoton wächst, kann F höchstens n Sprungstellen der Sprunghöhe $\frac{1}{n}$ haben, d.h.

  $$|S_n| \leq n.$$

  Wegen $(*)$ gilt aber $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n = \{x_i\}_{i\in I}$, d.h. die Menge der Sprungstellen $\{x_i\}_{i\in I}$ von F ist eine abzählbare Vereinigung von abzählbaren Mengen und damit selbst abzählbar.

Aufgabe 14 (Modellierung von Zufallsvariablen, 6 = 1.5 + 1 + 1 + 1.5 + 1 Punkte).

Gegeben sei ein Wahrscheinichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Wir definieren eine diskrete Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) Die durch X induzierte Verteilung $\mathbb{P}^X$ ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf Ω^X und $\mathcal{P}(\Omega^X)$.

Ein Korrektor verzichtet auf das Korrigieren von Klausuren und ermittelt die Noten, indem er einen sechsseitigen Würfel dreimal unabhängig voneinander wirft und die kleinste auftretende Augenzahl als Endnote vergibt.

(b) (i) Sei $\mathbb{P}$ als Laplace-Verteilung festegelgt. Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ an, der das Zufallsexperiment vollständig modelliert.

(ii) Definieren Sie eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$, die einem Elementarereignis $\omega \in \Omega$ die vergebene Endnote zuordnet.

(c) Geben Sie die Elemente von $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 5\}$ an und berechnen Sie $\mathbb{P}(X = 5)$.

(d) Berechnen Sie den induzierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega^X, \mathcal{A}^X = \mathcal{P}(\Omega^X), \mathbb{P}^X)$ von X, indem Sie Ω^X und $\mathbb{P}^X(\{x\})$ (die Zähldichte) für jedes $x \in \Omega^X$ angeben.

(e) Berechnen und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion $F_X(x) := \mathbb{P}(X \leq x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

Lösung:

(a) Wir zeigen für $\mathbb{P}^X$ die drei Eigenschaften einer Verteilung, die im Wesentlichen von $\mathbb{P}$ vererbt werden.

(i) Es gilt $\mathbb{P}^X(\Omega^X) = \mathbb{P}(X^{-1}(\Omega^X)) = \mathbb{P}(\Omega) \overset{\mathbb{P}\text{ W'verteilung}}{=} 1.$

(ii) Sei $A \in \mathcal{P}(\Omega^X)$ beliebig. Dann gilt $\mathbb{P}^X(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) \overset{\mathbb{P}\text{ W'Verteilung}}{\geq} 0.$

(iii) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(\Omega^X)^{\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^X\left(\dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &= \mathbb{P}\left(X^{-1}\left(\dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)\right) \overset{\text{Urbild-Eig.}}{=} \mathbb{P}\left(\dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} X^{-1}(A_n)\right) \\ &\overset{\text{W'verteilung}}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X^{-1}(A_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}^X(A_n).\end{aligned}$$

(b) Wähle

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^3 = \{(w_1, w_2, w_3) : w_i \in \{1,2,3,4,5,6\} \text{ für } i = 1,2,3\}.$$

Ein Element $\omega = (w_1, w_2, w_3) \in \Omega$ steht dann für die drei Ergebnisse der Würfelwürfe. Da alle Ergebnisse der Würfelwürfe gleichwahrscheinlich sind, stellt dieser Stichprobenraum Ω zusammen mit der Laplaceverteilung $\mathbb{P}$ das Zufallsexperiment aus der Aufgabenstellung vollständig dar.
Tritt ein Ereignis $\omega = (w_1, w_2, w_3) \in \Omega$ ein, so wird der kleinste Würfelwurf, d.h. das kleinste der drei w_1, w_2, w_3 die Endnote. Wir müssen also definieren:

$$X : \Omega \to \mathbb{N}, \quad X(\omega) = \min\{w_1, w_2, w_3\}.$$

(c) Die Menge $\{X = 5\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = 5\}$ ist die Menge der Würfelwürfe, bei welchen das Minimum eine 5 ist. Dies ist

$$\begin{aligned}\{X = 5\} &= \{\omega \in \Omega : X(\omega) = 5\} \\ &= \{(5,5,5), (5,5,6), (5,6,5), (6,5,5), (5,6,6), (6,5,6), (6,6,5)\}.\end{aligned}$$

Es gilt

$$\mathbb{P}(X = 5) = \frac{|\{X = 5\}|}{|\Omega|} = \frac{7}{6^3} \approx 0.0324,$$

da $\mathbb{P}$ eine Laplace-Verteilung ist.

(d) Aufgrund der Bildungsvorschrift von X gilt offensichtlich $\Omega^X = \text{Bild}(X) = \{1,2,3,4,5,6\}$. Die induzierte Wahrscheinlichkeitsverteilung berechnen wir wie folgt:
Ist $x \in \Omega^X = \{1,2,3,4,5,6\}$ und gilt $X(\omega) = x$, so muss mindestens eines der w_1, w_2, w_3 dem Wert x entsprechen, und die anderen beiden w_i müssen größer oder gleich sein. Hier gibt es drei Fälle:

(i) Nur ein w_i hat den Wert x.
Die anderen beiden w_j können dann aus $(6 - x)$ Werten wählen. Insgesamt sind das $3 \cdot (6 - x)^2$ Möglichkeiten.

(ii) Zwei w_i haben den Wert x und der dritte Wert w_j ist größer.
Dafür gibt es $\binom{3}{2} \cdot (6-x) = 3 \cdot (6-x)$ Möglichkeiten.

(iii) Alle drei w_i haben den Wert x.
Dafür gibt es 1 Möglichkeit.

Wir erhalten also insgesamt

$$\mathbb{P}^X(\{x\}) = \mathbb{P}(X = x) = \frac{|\{X = x\}|}{|\Omega|} = \frac{3(6-x)^2 + 3(6-x) + 1}{6^3}.$$

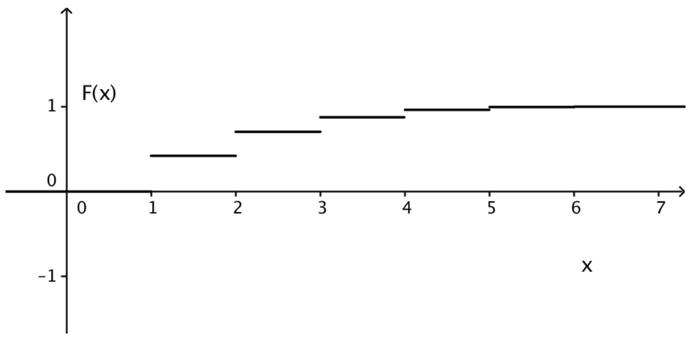
Damit gilt explizit für $x \in \Omega^X$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^X(\{1\}) &= \frac{91}{6^3}, \quad \mathbb{P}^X(\{2\}) = \frac{61}{6^3}, \quad \mathbb{P}^X(\{3\}) = \frac{37}{6^3}, \\ \mathbb{P}^X(\{4\}) &= \frac{19}{6^3}, \quad \mathbb{P}^X(\{5\}) = \frac{7}{6^3}, \quad \mathbb{P}^X(\{6\}) = \frac{1}{6^3}. \end{aligned}$$

(e) Die Verteilungsfunktion $F(x) = \mathbb{P}(X \le x)$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} F(x) &= \mathbb{P}(X \le x) = \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \mathbb{P}^X(\{k\}) = \frac{1}{6^3} \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \Big(3(6-k)^2 + 3(6-x) + 1\Big) \\ &= \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \mathbb{P}(X \le 1) = \frac{91}{6^3}, & 1 \le x < 2, \\ \mathbb{P}(X \le 2) = \frac{152}{6^3} = \frac{91+61}{6^3}, & 2 \le x < 3, \\ \mathbb{P}(X \le 3) = \frac{189}{6^3} = \frac{91+61+37}{6^3}, & 3 \le x < 4, \\ \mathbb{P}(X \le 4) = \frac{208}{6^3} = \frac{91+61+37+19}{6^3}, & 4 \le x < 5, \\ \mathbb{P}(X \le 5) = \frac{215}{6^3} = \frac{91+61+37+19+7}{6^3}, & 5 \le x < 6, \\ \mathbb{P}(X \le 6) = 1, & 6 \le x. \end{cases} \end{aligned}$$

Wir erhalten folgende Skizze:



Aufgabe 15 (Gedächtinislosigkeit der geometrischen Verteilung, 4 = 2 + 2 Punkte).

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ eine Zufallsvariable mit Werten in den natürlichen Zahlen.

(a) Es sei $X \sim \mathcal{G}(p)$ geometrisch verteilt mit Parameter $p \in (0, 1)$. Zeigen Sie, dass für alle $k, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X = n - 1 + k \mid X \ge n). \qquad (*)$$

Erklären Sie kurz, warum diese Eigenschaft als „Gedächtnislosigkeit“ der geometrischen Verteilung bezeichnet wird.

(b) Zeigen Sie, dass eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{N}$, die $(*)$ erfüllt, geometrisch verteilt mit einem geeigneten Parameter $p \in (0,1)$ ist.
Hinweis: Definieren Sie $p := \mathbb{P}(X = 1)$, *nutzen Sie* $(*)$ *mit* $k = 1$ *und leiten Sie so eine rekursive Beziehung der Form* $\mathbb{P}(X \geq n+1) = c \cdot \mathbb{P}(X \geq n)$ *mit geeignetem* $c \in \mathbb{R}$ *her.*

Lösung:

Da $k \in \mathbb{N}$, ist $X = n-1+k \geq n$ und also $\{X = n-1+k\} \subseteq \{X \geq n\}$. Es folgt

$$\{X = n-1+k, X \geq n\} \quad = \quad \{X = n-1+k\} \cap \{X \geq n\} \quad = \quad \{X = n-1+k\}.$$

Damit ist

$$\mathbb{P}(X = n-1+k \mid X \geq n) = \frac{\mathbb{P}(X = n-1+k, X \geq n)}{\mathbb{P}(X \geq n)} = \frac{\mathbb{P}(X = n-1+k)}{\mathbb{P}(X \geq n)}. \tag{1}$$

(a) Da X geometrisch verteilt mit Parameter $p \in (0,1)$ ist, gilt

$$\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p, \qquad k \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X < n) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X = k) \quad &= \quad \sum_{k=1}^{n-1} (1-p)^{k-1} \cdot p \\ &= \quad p \cdot \sum_{k=0}^{n-2} (1-p)^k = p \cdot \frac{1-(1-p)^{n-1}}{1-(1-p)} = 1-(1-p)^{n-1}, \end{aligned}$$

weswegen $\mathbb{P}(X \geq n) = 1 - \mathbb{P}(X < n) = (1-p)^{n-1}$. Also folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = n-1+k | X \geq n) \quad &\overset{(1)}{=} \quad \frac{\mathbb{P}(X = n-1+k)}{\mathbb{P}(X \geq n)} = \frac{(1-p)^{(n-1+k)-1} \cdot p}{(1-p)^{n-1}} \\ &= \quad (1-p)^{k-1} \cdot p = \mathbb{P}(X = k). \end{aligned}$$

Erklärung der Gedächtnislosigkeit $(*)$:

- $\mathbb{P}(X = k)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach $k-1$ Misserfolgen beim k-ten Versuch ein Erfolg eingetreten ist.
- $\{X \geq n\}$ bezeichnet das Ereignis, dass die ersten $n-1$ Versuche Misserfolge gewesen sind und der Erfolg erst ab dem n-ten Versuch (oder später!) eintritt.
- $(*)$ bedeutet somit: Die Wahrscheinlichkeit, dass der erste Erfolg beim k-ten Versuch eintritt, ist gleich der Wahrscheinlichkeit, dass der erste Erfolg beim $(n-1+k)$-ten Versuch auftritt, wenn bis zum $(n-1)$-ten Versuch kein Erfolg eingetreten ist.
- Damit ist es für den k-ten Versuch uninteressant, wie viele $n-1$ Misserfolge vorher stattgefunden haben. Die Unabhängigkeit des Ausgangs des k-ten Versuchs von den Ausgängen der vorherigen Versuche ist die Gedächtnislosigkeit der geometrischen Verteilung.

(b) Sei $X : \Omega \to \mathbb{N}$ eine $\mathbb{N}$-wertige Zufallsvariable. Definiere $p := \mathbb{P}(X = 1)$. Dann ist für alle $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} &p = \mathbb{P}(X = 1) \overset{(*)}{=} \frac{\mathbb{P}(X = n)}{\mathbb{P}(X \geq n)} = \frac{\mathbb{P}(X \geq n) - \mathbb{P}(X \geq n+1)}{\mathbb{P}(X \geq n)} = 1 - \frac{\mathbb{P}(X \geq n+1)}{\mathbb{P}(X \geq n)} \\ \Longrightarrow \quad &\mathbb{P}(X \geq n+1) = (1-p) \cdot \mathbb{P}(X \geq n). \end{aligned}$$

Damit folgt für beliebiges $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq n) = (1-p) \cdot \mathbb{P}(X \geq n-1) &= (1-p)^2 \cdot \mathbb{P}(X \geq n-2) \\ &= \ldots = (1-p)^{n-1} \cdot \mathbb{P}(X \geq 1) = (1-p)^{n-1}.\end{aligned}$$

Es ist $\mathbb{P}(X \geq 1) = 1$, da X eine $\mathbb{N}$-wertige Zufallsvariable ist. Insgesamt erhalten wir

$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X \geq n) - \mathbb{P}(X \geq n+1) = (1-p)^{n-1} - (1-p)^n = (1-p)^{n-1} \cdot p.$$

Damit ist X geometrisch verteilt.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **14. November 2019, 11:00 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/ews-WS1920/index.html`