UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Nathawut Phandoidaen
Wintersemester 2019/2020

4. Übungsblatt

Aufgabe 13	Aufgabe 14	Aufgabe 15	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 13 (Eigenschaften einer Verteilungsfunktion, 6 = 1 + 2 + 1 + 2 Punkte).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine diskrete Zufallsvariable. Die Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei mit $F(x) := \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\})$ bezeichnet. Zeigen Sie:

(a) F ist monoton wachsend, d.h. für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ gilt: $x_1 \leq x_2 \implies F(x_1) \leq F(x_2)$.

(b) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$

(c) F ist rechtsseitig stetig, d.h. für jede monoton fallende Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit $x_n \downarrow x$, $x \in \mathbb{R}$, gilt $F(x_n) \to F(x)$, $n \to \infty$.

Es kann gezeigt werden, dass F linksseitige Grenzwerte besitzt, d.h. für eine monoton wachsende Folge reeller Zahlen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit $x_n \uparrow x$, $x \in \mathbb{R}$, gilt $F(x_n) \to \mathbb{P}(X < x)$.

(d) Zeigen Sie, dass F höchstens abzählbar unendlich viele Sprungstellen (bzw. Unstetigkeitsstellen) besitzt.

Hinweis zu (b) und (c): Verwenden Sie die Aussage von Aufgabe 1(c) auf dem 1. Übungsblatt, indem Sie geeignete Mengenfolgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definieren. Bei (b) dürfen Sie die geeignete De Morgansche Regel aus Aufgabe P1 der Präsenzübungen 1 verwenden.

Aufgabe 14 (Modellierung von Zufallsvariablen, 6 = 1.5 + 1 + 1 + 1.5 + 1 Punkte).
Gegeben sei ein Wahrscheinichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Wir definieren eine diskrete Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) Die durch X induzierte Verteilung $\mathbb{P}^X$ ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf Ω^X und $\mathcal{P}(\Omega^X)$.

Ein Korrektor verzichtet auf das Korrigieren von Klausuren und ermittelt die Noten, indem er einen sechsseitigen Würfel dreimal unabhängig voneinander wirft und die kleinste auftretende Augenzahl als Endnote vergibt.

(b) (i) Sei $\mathbb{P}$ als Laplace-Verteilung festegelgt. Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ an, der das Zufallsexperiment vollständig modelliert.

(ii) Definieren Sie eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$, die einem Elementarereignis $\omega \in \Omega$ die vergebene Endnote zuordnet.

(c) Geben Sie die Elemente von $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 5\}$ an und berechnen Sie $\mathbb{P}(X = 5)$.

(d) Berechnen Sie den induzierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega^X, \mathcal{A}^X = \mathcal{P}(\Omega^X), \mathbb{P}^X)$ von X, indem Sie Ω^X und $\mathbb{P}^X(\{x\})$ (die Zähldichte) für jedes $x \in \Omega^X$ angeben.

(e) Berechnen und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion $F_X(x) := \mathbb{P}(X \leq x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 15 (Gedächtinislosigkeit der geometrischen Verteilung, 4 = 2 + 2 Punkte).

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ eine Zufallsvariable mit Werten in den natürlichen Zahlen.

(a) Es sei $X \sim \mathcal{G}(p)$ geometrisch verteilt mit Parameter $p \in (0, 1)$. Zeigen Sie, dass für alle $k, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X = n - 1 + k \mid X \geq n). \tag{$*$}$$

Erklären Sie kurz, warum diese Eigenschaft als „Gedächtnislosigkeit" der geometrischen Verteilung bezeichnet wird.

(b) Zeigen Sie, dass eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{N}$, die $(*)$ erfüllt, geometrisch verteilt mit einem geeigneten Parameter $p \in (0, 1)$ ist.
Hinweis: Definieren Sie $p := \mathbb{P}(X = 1)$, nutzen Sie $(*)$ mit $k = 1$ und leiten Sie so eine rekursive Beziehung der Form $\mathbb{P}(X \geq n + 1) = c \cdot \mathbb{P}(X \geq n)$ mit geeignetem $c \in \mathbb{R}$ her.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **14. November 2019, 11:00 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/ews-WS1920/index.html`