UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Nathawut Phandoidaen
Wintersemester 2019/2020

3. Übungsblatt – Lösungen

Aufgabe 9	Aufgabe 10	Aufgabe 11	Aufgabe 12	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 9 (Diskrete Verteilungen, 4 = 1 + 1.5 + 1.5 Punkte).

Bestimmen Sie bei jeder Aufgabe zunächst, welche Wahrscheinlichkeitsverteilung zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit benötigt wird und geben Sie deren Parameter an.

(a) Sie werfen einen fairen Würfel, bis das erste Mal eine „6“ auftritt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit muss mehr als 9-mal gewürfelt werden?

(b) Ein Insekt legt 100 Eier, die sich unabhängig voneinander entwickeln. Aus jedem Ei schlüpft mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.01 ein Nachkomme. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es mindestens 2 Nachkommen gibt? Geben Sie zunächst die exakte Wahrscheinlichkeit an. Berechnen Sie dann die Wahrscheinlichkeit unter Nutzung der Approximation durch eine Poisson-Verteilung.

Zeigen Sie, dass folgende Approximation von Zähldichten gilt:

(c) Die Zähldichte der hypergeometrischen Verteilung mit Parametern (N, M, n) lässt sich für $N, M \to \infty$ und $M/N \to p$ durch die Zähldichte der Binomial-Verteilung mit Parametern (n, p) approximieren.

Lösung:

(a) Die Anzahl der Würfe ist geometrisch verteilt mit einer Wahrscheinlichkeit $p = 1/6$ für Erfolg, also

$$p(k) = p \cdot (1-p)^{k-1},$$

wobei k die Anzahl der Würfe *einschließlich* dem Auftreten der „6“ ist. Damit gilt

$$\mathbb{P}(\text{„mehr als 9-mal würfeln“}) = \sum_{k=10}^{\infty} p(k) = p \sum_{k=9}^{\infty} (1-p)^k = \frac{1}{6} \cdot \sum_{k=9}^{\infty} (5/6)^k \approx 0.1938.$$

(b) Da sich die Eier unabhängig voneinander entwickeln und eine feste Anzahl von $n = 100$ Versuchen mit Erfolgswahrscheinlichkeit (Nachkomme schlüpft) $p = 0.01$ durchgeführt wird, folgt die Anzahl der Nachkommen einer Binomial-Verteilung mit Parametern (n, p). Die Zähldichte ist gegeben über

$$p(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}.$$

Die exakte Wahrscheinlichkeit für mindestens zwei Nachkommen ist demzufolge

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{„mindestens 2 Nachkommen"}) &= 1 - \mathbb{P}(\text{„kein oder ein Nachkomme"}) \\
&= 1 - p(0) - p(1) = 1 - (1-p)^n - n \cdot p \cdot (1-p)^{n-1} \\
&\approx 1 - 0.366 - 0.370 = 0.264.
\end{aligned}$$

Nach der Vorlesung (Proposition 3.8) kann die Zähldichte der Binomial-Verteilung mit Parametern (n, p) für großes n und kleines p durch die Zähldichte einer Poisson-Verteilung mit Parameter $\lambda = n \cdot p$ approximiert werden.
Hier approximieren wir also $p(k)$ durch $\hat{p}(k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$, die Zähldichte einer Poisson-Verteilung mit Parameter $\lambda = n \cdot p = 1$. In diesem Fall erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{„mindestens 2 Nachkommen"}) &= 1 - \mathbb{P}(\text{„kein oder ein Nachkomme"}) \\
&\approx 1 - \hat{p}(0) - \hat{p}(1) = 1 - \frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} - \frac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!} = 1 - \frac{2}{e} \approx 0.264.
\end{aligned}$$

(c) Die Zähldichte der hypergeometrischen Verteilung $H(N, M, n)$ lautet

$$\begin{aligned}
p(k) &= \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\frac{M!}{k! \cdot (M-k)!} \cdot \frac{(N-M)!}{(n-k)! \cdot (N-M-n+k)!}}{\frac{N!}{n! \cdot (N-n)!}} \\
&= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot \frac{\frac{M!}{(M-k)!} \cdot \frac{(N-M)!}{(N-M-n+k)!}}{\frac{N!}{(N-n)!}} \\
&= \binom{n}{k} \cdot \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(M-i) \cdot \prod_{i=0}^{n-k-1}(N-M-i)}{\prod_{i=0}^{n-1}(N-i)} \cdot \frac{\frac{1}{N^n}}{\frac{1}{N^n}} \\
&= \binom{n}{k} \cdot \frac{\prod_{i=0}^{k-1}\left(\frac{M}{N} - \frac{i}{N}\right) \cdot \prod_{i=0}^{n-k-1}\left(1 - \frac{M}{N} - \frac{i}{N}\right)}{\prod_{i=0}^{n-1}\left(1 - \frac{i}{N}\right)}.
\end{aligned}$$

Alle drei Produkte sind endlich. Damit ziehen wir den Limes $M, N \to \infty$ in die Produkte hinein. Weiter gilt $M/N \to p$ und $i/N \to 0$, da i ein fester Index ist. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
p(k) &\overset{M,N\to\infty}{\to} \binom{n}{k} \cdot \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(p-0) \cdot \prod_{i=0}^{n-k-1}(1-p-0)}{\prod_{i=0}^{n-1}(1-0)} \\
&= \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}.
\end{aligned}$$

Das ist die Zähldichte der Binomial-Verteilung.

Aufgabe 10 (Faltung und Ausdünnung von Zähldichten, 4 = 2 + 2 Punkte).

(a) **Ausdünnung einer Poisson-Verteilung:**
Die Anzahl der Siebenmeter während eines Handballspiels sei Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Die Siebenmeter werden unabhängig voneinander jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von $p > 0$ in ein Tor verwandelt. Berechnen Sie die Verteilung der geworfenen Tore durch Siebenmeter während des Spiels.
Hinweis: Gesucht ist eine Zähldichte $p(k)$, welche die Wahrscheinlichkeit angibt, dass während des Spiels k Tore durch Siebenmeter geworfen werden.

(b) **Faltung zweier Binomial-Verteilungen:**
Sie haben eine Münze, bei welcher während eines Münzwurfes mit einer Wahrscheinlichkeit von $p \in (0,1)$ „Kopf" erscheint. Sie werfen diese Münze nun n-mal hintereinander und zählen die Anzahl k_1 der Köpfe. Danach wirft ein/e Freund/in die Münze noch m-mal hintereinander und zählt ebenfalls die Anzahl k_2 der Köpfe. Welcher Verteilung folgt die Summe der Anzahlen $k_1 + k_2$ der Köpfe?
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis die Formel $\sum_{k_1=0}^{k} \binom{n}{k_1} \cdot \binom{m}{k-k_1} = \binom{m+n}{k}$ *für* $k \leq m+n, m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, verwenden.

Lösung:

(a) Wir definieren die Ereignisse

- $S_n =$ „n Siebenmeter treten im Handballspiel auf" $(n \in \mathbb{N}_0)$,
- $T_k =$ „k Tore durch Siebenmeter treten im Handballspiel auf" $(k \in \mathbb{N}_0)$.

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, so dass die in der Aufgabenstellung gegebenen Wahrscheinlichkeiten gelten. Die Anzahl der Siebenmeter ist Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$, also

$$\mathbb{P}(S_n) = \frac{\lambda^n}{n!} \cdot e^{-\lambda}.$$

Wenn die Anzahl n der Siebenmeter bekannt ist, ist die Anzahl der Tore Binomialverteilt; die Siebenmeter werden unabhängig voneinander mit einer Wahrscheinlichkeit $p > 0$ zu Toren. Allerdings gibt es nur höchstens so viele Tore wie Siebenmeter, weswegen

$$\mathbb{P}(T_k \mid S_n) = \begin{cases} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}, & k \leq n, \\ 0, & k > n. \end{cases}$$

Da $\bigcup_{n=0}^{\infty} S_n = \Omega$, folgt mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T_k|S_n) \cdot \mathbb{P}(S_n) &= \sum_{n=k}^{\infty} \left[\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \right] \cdot \left[\frac{\lambda^n}{n!} \cdot e^{-\lambda} \right] \\ &= \frac{(p\lambda)^k}{k!} e^{-\lambda p}. \end{aligned}$$

(b) Wir definieren für $k_1 \in \{0, ..., n\}, k_2 \in \{0, ..., m\}, k \in \{0, ..., m+n\}$ die Ereignisse

$$\begin{aligned} A_{k_1} &:= \text{„Es werden } k_1 \text{ Köpfe geworfen.“}, \\ B_{k_2} &:= \text{„Die/der Freund/in wirft } k_2 \text{ Köpfe.“}, \\ C_k &:= \text{„Die beiden Würfe zusammen ergeben } k \text{ Köpfe.“}. \end{aligned}$$

Laut Voraussetzung sind A_k, B_l für alle k, l unabhängig voneinander. Außerdem gilt

$$\mathbb{P}(A_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(B_k) = \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k},$$

wobei die Anzahl Kopf bei unabhängigen Würfen Binomial-verteilt ist. Nun gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C_k) &= \sum_{k_1=0}^{\infty} \mathbb{P}(C_k \cap A_{k_1}) = \sum_{k_1=0}^{k} \mathbb{P}(C_k \cap A_{k_1}) = \sum_{k_1=0}^{k} \mathbb{P}(B_{k-k_1} \cap A_{k_1}) \\
&\overset{\text{unabh.}}{=} \sum_{k_1=0}^{k} \mathbb{P}(B_{k-k_1}) \cdot \mathbb{P}(A_{k_1}) \\
&= \sum_{k_1=0}^{k} \left[\binom{n}{k_1} p^{k_1} (1-p)^{n-k_1} \right] \cdot \left[\binom{m}{k-k_1} p^{k-k_1} (1-p)^{m-(k-k_1)} \right] \\
&= p^k \cdot (1-p)^{(m+n)-k} \sum_{k_1=0}^{k} \binom{n}{k_1} \cdot \binom{m}{k-k_1} \\
&= \binom{m+n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{(m+n)-k},
\end{aligned}$$

was die Zähldichte der Binomial-Verteilung mit Parametern $(m+n, p)$ ergibt. Beachte, dass nach der Definition der Ereignisse A_{k_1} und C_k, $A_{k_1} \cap C_k = \emptyset$ für $k_1 > k$ sein muss.

Aufgabe 11 (Neyman-Pearson-Lemma und gleichmäßig beste Tests, 4 = 1.5 + 1.5 + 1 Punkte).

Die Anzahl der im Laufe eines Jahres bei einer Versicherung eingehenden Schadensmeldungen wird als Poisson-verteilt mit einem unbekannten Parameter $\lambda > 0$ angenommen. Aufgrund der Daten des Vorjahres wird die Hypothese $H_0 : \lambda = \lambda_0$ gegen die Alternative $H_A : \lambda = \lambda_1$ mit $\lambda_1 > \lambda_0$ getestet.

(a) Geben Sie den Neyman-Pearson-Test ϕ zum Niveau $\alpha \in (0, 1)$ für dieses Testproblem an.

(b) Unter welchen Voraussetzungen ist der Test ϕ aus (a) ein gleichmäßig bester Test für H_0 gegen $H'_A : \ \lambda \in \{\lambda' : \lambda' > \lambda_0\}$?

(c) Im letzten Jahr sind 9876 Schadensmeldungen eingegangen. Wir betrachten folgendes Testproblem:

H_0 : Es werden 9000 Schadensmeldungen eingehen.

H_A : Es werden *mehr als* 9000 Schadensmeldungen eingehen.

Kann die Nullhypothese H_0 mit einem Neyman-Pearson-Test zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ abgelehnt werden?

Hinweis: Es gilt $\sum_{k=0}^{9156} \frac{\lambda_0^k}{k!} \exp(-\lambda_0) \geq 0.95$.

Lösung:

(a) Wir orientieren uns an der Zusammenfassung 4.5 aus der Vorlesung.
Wir haben einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_\lambda)$ mit abzählbarem $\Omega = \mathbb{N}_0$ und $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$. Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen $\mathbb{P}_\lambda$ sind Poisson-Verteilungen mit Parameter $\lambda > 0$ und Zähldichten

$$p_\lambda(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Für die Hypothesen

$$H_0 : \mathbb{P}_{\lambda_0} \quad \text{gegen} \quad H_A : \mathbb{P}_{\lambda_1}$$

bzw.

$$H_0 : \lambda = \lambda_0 \quad \text{gegen} \quad H_A : \lambda = \lambda_1$$

mit $\lambda_1 > \lambda_0$, erhalten wir den Likelihoodquotienten

$$L(k) := \frac{p_{\lambda_1}(k)}{p_{\lambda_0}(k)} = \frac{e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^k}{k!}}{e^{-\lambda_0}\frac{\lambda_0^k}{k!}} = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^k \cdot e^{\lambda_0 - \lambda_1}. \tag{1}$$

Der Neyman-Pearson-Test zum Niveau $\alpha \in (0,1)$ für dieses Testproblem lautet daher

$$\phi^* : \Omega \ \to \{\mathbb{P}_{\lambda_0}, \mathbb{P}_{\lambda_1}\}, \quad \phi^*(k) = \begin{cases} \mathbb{P}_{\lambda_0}, & L(k) < c^*, \\ \mathbb{P}_{\lambda_1}, & L(k) \geq c^*, \end{cases}$$

wobei $\mathbb{P}_{\lambda_0}(\phi^* = \mathbb{P}_{\lambda_1}) = \alpha$. Der Neyman-Pearson-Test existiert, sofern die Gleichung $\mathbb{P}_{\lambda_0}(\phi^* = \mathbb{P}_{\lambda_1}) = \alpha$ für ein $c^* \in \mathbb{R}$ erfüllt werden kann.

(b) Da $k \mapsto L(k)$ für feste $\lambda_1 > \lambda_0 > 0$ monoton wachsend ist, können wir den Test ϕ^* äquivalent umformen zu

$$\phi^*(k) = \begin{cases} \mathbb{P}_{\lambda_0}, & k < k^*, \\ \mathbb{P}_{\lambda_1}, & k \geq k^*, \end{cases}$$

mit $\mathbb{P}_{\lambda_0}(\phi^* = \mathbb{P}_{\lambda_1}) = \mathbb{P}_{\lambda_0}(k \geq k^*) = \alpha$. Der Neyman-Pearson-Test existiert, sofern die Gleichung $\mathbb{P}_{\lambda_0}(k \geq k^*) = \alpha$ für ein $k^* \in \mathbb{R}$ erfüllt werden kann.
Offensichtlich hängt die Existenz des Neyman-Pearson-Tests daher nicht vom konkreten Wert von λ_1 ab, sondern nur von der Eigenschaft $\lambda_1 > \lambda_0$.

Nehmen wir nun also an, dass für ein vorgegebenes $\alpha \in (0,1)$ ein $k^* \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $\mathbb{P}_{\lambda_0}(k \geq k^*) = \alpha$. Dann gilt für jedes $\lambda_1 > \lambda_0$ nach dem Neyman-Pearson-Lemma: Jede Entscheidungsfunktion $\phi : \Omega \to \{\mathbb{P}_{\lambda_0}, \mathbb{P}_{\lambda_1}\}$ mit $\mathbb{P}_{\lambda_0}(\phi = \mathbb{P}_{\lambda_1}) \leq \alpha$ erfüllt

$$\mathbb{P}_{\lambda_1}(\phi = \mathbb{P}_{\lambda_0}) \geq \mathbb{P}_{\lambda_1}(\phi^* = \mathbb{P}_{\lambda_0}).$$

Damit haben wir für vorgegebenes λ_0, α ein festes ϕ^* gefunden, sodass für alle $\lambda_1 > \lambda_0$ gilt:

$$\phi^* \text{ minimiert } \phi \mapsto \mathbb{P}_{\lambda_1}(\phi = \mathbb{P}_{\lambda_0}) \text{ unter der Nebenbedingung } \mathbb{P}_{\lambda_0}(\phi = \mathbb{P}_{\lambda_1}) \leq \alpha.$$

Das bedeutet gerade, dass ϕ^* gleichmäßig bester Test für die Hypothesen $H_0 : \lambda = \lambda_0$ gegen $H_A' : \lambda \in \{\lambda' : \lambda' > \lambda_0\}$ ist.

(c) Nach (b) sind die Neyman-Pearson-Tests von der Form

$$\phi_{c^*}(k) = \begin{cases} \mathbb{P}_{\lambda_0} & k < k^*, \\ \mathbb{P}_{\lambda_1}, & k \geq k^*, \end{cases}$$

Wir suchen nun diejenigen k^*, für die die Neyman-Pearson-Tests das Signifikanzniveau α einhalten. Es gilt nach dem Hinweis für alle $k^* \geq 9156$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\lambda_0}(\phi^* = \mathbb{P}_{\lambda_1}) = \mathbb{P}_{\lambda_0}([k^*, \infty)) = 1 - \mathbb{P}_{\lambda_0}([0, k^*)) &\leq 1 - \mathbb{P}_{\lambda_0}([0, k^* - 1]) \\ \leq 1 - \mathbb{P}_{\lambda_0}([0, 9156]) = 1 - \sum_{k=0}^{9156} \frac{\lambda_0^k}{k!} \exp(-\lambda_0) &\leq 0.05 \end{aligned}$$

Damit sind alle Neyman-Pearson-Tests mit $k^* \geq 9156$ Tests zum Niveau α; insbesondere können wir mit

$$\phi^*(k) = \begin{cases} 0 & k < 9156, \\ 1, & k \geq 9156, \end{cases}$$

die Nullhypothese mit dem Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ ablehnen, d.h. $\phi^*(9876) = \mathbb{P}_{\lambda_1}$.

Aufgabe 12 (Modellierung mathematischer Testprobleme, 4 = 1.5 + 2.5 Punkte).
Ein Betrieb fertigt an zwei Maschinen elektrische Widerstände. Bei Maschine 1 gibt es erfahrungsgemäß 10% Ausschussstücke (1. Wahl), bei Maschine 2 gibt es 30% Ausschussstücke (2. Wahl). Es wird eine *große* unbeschriftete Kiste mit Widerständen gefunden und es soll mittels einer Stichprobe von n Widerständen aus der Kiste getestet werden, ob es sich um eine Kiste aus der Produktion 1. Wahl oder 2. Wahl handelt.

(a) Formulieren Sie dieses Testproblem mathematisch. Wählen Sie Null- und Alternativhypothese so, dass durch die folgende Forderung der Fehler 1. Art begrenzt wird: „Der peinliche Irrtum, dass die 2. Wahl fälschlicherweise als 1. Wahl deklariert wird, soll mit maximal 5% Wahrscheinlichkeit eintreten".
Hinweis: Da die „große" Kiste sehr viele Widerstände enthält, sollten Sie besser eine Approximation der hypergeometrischen Verteilung (vgl. Aufgabe 9(c)) nutzen.

(b) Bestimmen Sie den (approximativen) Neyman-Pearson-Test für das Testproblem aus (a) für die Fälle $n = 10$ und $n = 20$ und berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art.
Hinweis: Ein approximativer Neyman-Pearson-Test hat die Form eines Neyman-Pearson-Tests, erfüllt aber nicht die Bedingung $\mathbb{P}(\phi = \mathbb{Q}) = \alpha$, sondern $\mathbb{P}(\phi = \mathbb{Q}) \leq \alpha$, wobei die linke Seite der Ungleichung so groß wie möglich gewählt wird.

Lösung:

(a) Die Anzahl der Ausschussstücke in der entnommenen Stichprobe ist hypergeometrisch mit Parameter (N, M, n) verteilt, wovon M, N unbekannt sind.
Da es sich um eine große Kiste mit Widerständen handelt, können wir von $N \to \infty$ ausgehen. Ferner wird hier nur die Wahl zwischen 10% und 30% Ausschuss diskutiert, weswegen $M \to \infty$. Wir können annehmen, dass die Anzahl der Ausschussstücke in der Stichprobe einer Binomial-Verteilung mit Parametern (n, p) folgt, wobei $p = M/N$. Es bezeichne $k \in \Omega := \{0, ..., n\}$ die Anzahl der Ausschussstücke in der Stichprobe.
Es gibt zwei Hypothesen für die Verteilung der Stichprobe:

$$\begin{array}{llll} H_0: & \mathbb{P} = \mathcal{B}(n,p), \quad p = 0.3, & p(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} & \textit{Nullhypothese} \\ H_A: & \mathbb{Q} = \mathcal{B}(n,q), \quad q = 0.1, & q(k) = \binom{n}{k} \cdot q^k \cdot (1-q)^{n-k} & \textit{Alternativhypothese.} \end{array}$$

Wir suchen einen besten Test $\phi^*(k)$ zu einem vorgegebenen Niveau $\alpha = 0.05$, der anhand der Anzahl der Ausschussstücke k der Stichprobe von n Widerständen entweder die Nullhypothese H_0 annimmt oder verwirft.
Bemerkung zur Wahl von H_0 und H_A:
Es wurde durch

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\phi = \mathbb{Q}) \ = \ & \text{„Wahrscheinlichkeit, sich für die 1. Wahl zu entscheiden,} \\ & \text{obwohl eigentlich 2. Wahl vorliegt."} \ \leq \alpha := 0.05. \end{aligned}$$

eine Schranke für den Fehler 1. Art vorgegeben. Damit die (anschauliche) Interpretation des Fehler 1. Art mit der linken Seite $\mathbb{P}(\phi = \mathbb{Q})$ übereinstimmt, muss $\mathbb{P}$ (bzw. H_0) als die Wahrscheinlichkeitsverteilung der 2. Wahl und $\mathbb{Q}$ (bzw. H_A) als die Wahrscheinlichkeitsverteilung der 1. Wahl definiert werden.

(b) Ein (approximativer) Neyman-Pearson-Test für das in (a) formulierte Testproblem ist gegeben durch

$$\phi : \Omega \to \{\mathbb{P}, \mathbb{Q}\}, \quad \phi(k) = \begin{cases} \mathbb{P}, & L(k) := \frac{q(k)}{p(k)} < c^*, \\ \mathbb{Q}, & L(k) \geq c^*, \end{cases} \qquad (k = 0, ..., n)$$

für ein c^* mit $\mathbb{P}(\phi = \mathbb{Q}) = \mathbb{P}(L(k) \geq c^*) \leq \alpha$, so dass die linke Seite der Ungleichung maximal ist.

Wir versuchen den Test mit Hilfe der Monotonie von $L(k)$ zu vereinfachen. Wegen $p > q$ gilt

$$L(k) = \frac{q(k)}{p(k)} = \frac{\binom{n}{k} \cdot q^k \cdot (1-q)^{n-k}}{\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}} = \Big(\underbrace{\frac{q}{p}}_{<1}\Big)^k \cdot \Big(\underbrace{\frac{1-p}{1-q}}_{<1}\Big)^k \cdot \left(\frac{1-q}{1-p}\right)^n,$$

d.h. $L(k)$ ist monoton fallend in k. Der Test kann somit äquivalent umgeformt werden zu

$$\phi(k) = \begin{cases} \mathbb{P}, & k > k^*, \\ \mathbb{Q}, & k \leq k^*, \end{cases} \qquad (k = 0, ..., n)$$

mit einem maximalen k^*, so dass noch $\mathbb{P}(\phi = \mathbb{Q}) = \mathbb{P}(k \leq k^*) \leq \alpha$ gilt.

Für $n = 10$ ergibt sich somit

$$0.05 = \alpha \geq \mathbb{P}(k \leq k^*) = \sum_{k=0}^{k^*} p(k) = \sum_{k=0}^{k^*} \binom{10}{k} \cdot 0.3^k \cdot 0.7^{10-k} = \begin{cases} 0.028, & k^* = 0 \\ 0.149, & k^* = 1 \end{cases},$$

also $k^* = 0$. Der Fehler 2. Art beträgt

$$\mathbb{Q}(\phi = \mathbb{P}) = \mathbb{Q}(k > k^*) = \sum_{k=k^*+1}^{n} q(k) = \sum_{k=1}^{10} \binom{10}{k} \cdot 0.1^k \cdot 0.9^{10-k} = 0.651.$$

Für $n = 20$ ergibt sich:

$$0.05 = \alpha \geq \mathbb{P}(k \leq k^*) = \sum_{k=0}^{k^*} p(k) = \sum_{k=0}^{k^*} \binom{20}{k} \cdot 0.3^k \cdot 0.7^{20-k} = \begin{cases} 0.034, & k^* = 2 \\ 0.107, & k^* = 3 \end{cases}$$

Also $k^* = 2$. Der Fehler 2. Art ist

$$\mathbb{Q}(\phi = \mathbb{P}) = \mathbb{Q}(k > k^*) = \sum_{k=k^*+1}^{n} q(k) = \sum_{k=3}^{20} \binom{20}{k} \cdot 0.1^k \cdot 0.9^{20-k} = 0.323.$$

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **07. November 2019, 11:00 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/ews-WS1920/index.html`