Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Nathawut Phandoidaen
Wintersemester 2019/2020

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

3. Übungsblatt

Aufgabe 9	Aufgabe 10	Aufgabe 11	Aufgabe 12	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 9 (Diskrete Verteilungen, 4 = 1 + 1.5 + 1.5 Punkte).

Bestimmen Sie bei jeder Aufgabe zunächst, welche Wahrscheinlichkeitsverteilung zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit benötigt wird und geben Sie deren Parameter an.

(a) Sie werfen einen fairen Würfel, bis das erste Mal eine „6“ auftritt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit muss mehr als 9-mal gewürfelt werden?

(b) Ein Insekt legt 100 Eier, die sich unabhängig voneinander entwickeln. Aus jedem Ei schlüpft mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.01 ein Nachkomme. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es mindestens 2 Nachkommen gibt? Geben Sie zunächst die exakte Wahrscheinlichkeit an. Berechnen Sie dann die Wahrscheinlichkeit unter Nutzung der Approximation durch eine Poisson-Verteilung.

Zeigen Sie, dass folgende Approximation von Zähldichten gilt:

(c) Die Zähldichte der hypergeometrischen Verteilung mit Parametern (N, M, n) lässt sich für $N, M \to \infty$ und $M/N \to p$ durch die Zähldichte der Binomial-Verteilung mit Parametern (n, p) approximieren.

Aufgabe 10 (Faltung und Ausdünnung von Zähldichten, 4 = 2 + 2 Punkte).

(a) **Ausdünnung einer Poisson-Verteilung:**
Die Anzahl der Siebenmeter während eines Handballspiels sei Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Die Siebenmeter werden unabhängig voneinander jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von $p > 0$ in ein Tor verwandelt. Berechnen Sie die Verteilung der geworfenen Tore durch Siebenmeter während des Spiels.
Hinweis: Gesucht ist eine Zähldichte $p(k)$, welche die Wahrscheinlichkeit angibt, dass während des Spiels k Tore durch Siebenmeter geworfen werden.

(b) **Faltung zweier Binomial-Verteilungen:**
Sie haben eine Münze, bei welcher während eines Münzwurfes mit einer Wahrscheinlichkeit von $p \in (0, 1)$ „Kopf“ erscheint. Sie werfen diese Münze nun n-mal hintereinander und zählen die Anzahl k_1 der Köpfe. Danach wirft ein/e Freund/in die Münze noch m-mal hintereinander und zählt ebenfalls die Anzahl k_2 der Köpfe. Welcher Verteilung folgt die Summe der Anzahlen $k_1 + k_2$ der Köpfe?
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis die Formel $\sum_{k_1=0}^{k} \binom{n}{k_1} \cdot \binom{m}{k-k_1} = \binom{m+n}{k}$ *für* $k \leq m + n, m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, verwenden.

Aufgabe 11 (Neyman-Pearson-Lemma und gleichmäßig beste Tests, $4 = 1.5 + 1.5 + 1$ Punkte).

Die Anzahl der im Laufe eines Jahres bei einer Versicherung eingehenden Schadensmeldungen wird als Poisson-verteilt mit einem unbekannten Parameter $\lambda > 0$ angenommen. Aufgrund der Daten des Vorjahres wird die Hypothese $H_0 : \lambda = \lambda_0$ gegen die Alternative $H_A : \lambda = \lambda_1$ mit $\lambda_1 > \lambda_0$ getestet.

(a) Geben Sie den Neyman-Pearson-Test ϕ zum Niveau $\alpha \in (0, 1)$ für dieses Testproblem an.

(b) Unter welchen Voraussetzungen ist der Test ϕ aus (a) ein gleichmäßig bester Test für H_0 gegen $H'_A : \lambda \in \{\lambda' : \lambda' > \lambda_0\}$?

(c) Im letzten Jahr sind 9876 Schadensmeldungen eingegangen. Wir betrachten folgendes Testproblem:

$$\begin{aligned} H_0 &: \text{ Es werden 9000 Schadensmeldungen eingehen.} \\ H_A &: \text{ Es werden } \textit{mehr als} \text{ 9000 Schadensmeldungen eingehen.} \end{aligned}$$

Kann die Nullhypothese H_0 mit einem Neyman-Pearson-Test zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ abgelehnt werden?
Hinweis: Es gilt $\sum_{k=0}^{9156} \frac{\lambda_0^k}{k!} \exp(-\lambda_0) \geq 0.95$.

Aufgabe 12 (Modellierung mathematischer Testprobleme, $4 = 1.5 + 2.5$ Punkte).

Ein Betrieb fertigt an zwei Maschinen elektrische Widerstände. Bei Maschine 1 gibt es erfahrungsgemäß 10% Ausschussstücke (1. Wahl), bei Maschine 2 gibt es 30% Ausschussstücke (2. Wahl). Es wird eine *große* unbeschriftete Kiste mit Widerständen gefunden und es soll mittels einer Stichprobe von n Widerständen aus der Kiste getestet werden, ob es sich um eine Kiste aus der Produktion 1. Wahl oder 2. Wahl handelt.

(a) Formulieren Sie dieses Testproblem mathematisch. Wählen Sie Null- und Alternativhypothese so, dass durch die folgende Forderung der Fehler 1. Art begrenzt wird: „Der peinliche Irrtum, dass die 2. Wahl fälschlicherweise als 1. Wahl deklariert wird, soll mit maximal 5% Wahrscheinlichkeit eintreten“.
Hinweis: Da die „große“ Kiste sehr viele Widerstände enthält, sollten Sie besser eine Approximation der hypergeometrischen Verteilung (vgl. Aufgabe 9(c)) nutzen.

(b) Bestimmen Sie den (approximativen) Neyman-Pearson-Test für das Testproblem aus (a) für die Fälle $n = 10$ und $n = 20$ und berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art.
Hinweis: Ein approximativer Neyman-Pearson-Test hat die Form eines Neyman-Pearson-Tests, erfüllt aber nicht die Bedingung $\mathbb{P}(\phi = \mathbb{Q}) = \alpha$, *sondern* $\mathbb{P}(\phi = \mathbb{Q}) \leq \alpha$, *wobei die linke Seite der Ungleichung so groß wie möglich gewählt wird.*

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **07. November 2019, 11:00 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/ews-WS1920/index.html`