Einführung in die
Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Nathawut Phandoidaen
Wintersemester 2019/2020

2. Übungsblatt – Lösungen

Aufgabe 5	Aufgabe 6	Aufgabe 7	Aufgabe 8	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 5 (Bedingte Wahrscheinlichkeiten als W'verteilungen, 4 = 2 + 2 Punkte). Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

(a) Sei $B \in \mathcal{A}$ mit $\mathbb{P}(B) > 0$. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\,\cdot \mid B) : \mathcal{A} &\to [0,1] \\ A &\mapsto \mathbb{P}(A \mid B) \end{aligned}$$

eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\Omega, \mathcal{A}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}(A \mid \cdot\,)$ für ein $A \in \mathcal{A}$ im Allgemeinen keine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $(\Omega, \mathcal{A})$ ist, indem Sie ein geeignetes Gegenbeispiel angeben.

Lösung:

(a) Wir überprüfen die Axiome von Kolmogorov.

(i) Es gilt $\mathbb{P}(\Omega \mid B) = \frac{\mathbb{P}(\Omega \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \overset{B \subseteq \Omega}{=} \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$.

(ii) Für $A \in \mathcal{A}$ haben wir

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \geq 0,$$

da $\mathbb{P}(A \cap B) \geq 0$ (und $\mathbb{P}(B) > 0$ nach Voraussetzung).

(iii) Seien nun $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} A_i \,\middle|\, B\right) &= \frac{\mathbb{P}\left(\left(\dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cap B\right)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}\left(\dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} (A_i \cap B)\right)}{\mathbb{P}(B)} \\ &\overset{\mathbb{P}\text{ W'verteilung}}{=} \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i \mid B) \end{aligned}$$

(b) Sei $\Omega = \{a, b\}$ für zwei Elemente $a \neq b$ und $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Wir betrachten die Lapalace-Verteilung $\mathbb{P}$ auf Ω, d.h. $\mathbb{P}(\{a\}) = \frac{1}{2}$ und $\mathbb{P}(\{b\}) = \frac{1}{2}$. Sei nun $A = \{a\}$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(A \mid \Omega) = \frac{\mathbb{P}(A \cap \Omega)}{\mathbb{P}(\Omega)} = \frac{1}{2} \neq 1.$$

$\Longrightarrow$ $\mathbb{P}(A \mid \cdot\,)$ ist keine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $(\Omega, \mathcal{A})$.

Aufgabe 6 (Stochastische Unabhängigkeit, 4 = 1 + 1 + 2 Punkte).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B, C \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie:

(a) Die Ereignisse $\emptyset$ und Ω sind von jedem Ereignis A stochastisch unabhängig.

(b) Sind A, B, C gemeinsam stochastisch unabhängig, so sind sowohl $A \cap B$ und C als auch $A \cup B$ und C jeweils stochastisch unabhängig.

(c) Ein (fairer) Würfel, bei welchem die Augenzahlen von 1 bis 6 gleichwahrscheinlich sind, wird zweimal unabhängig voneinander geworfen. Wir definieren die folgenden Ereignisse:

$$\begin{aligned} A &= \text{„Die erste Augenzahl ist gerade. “} \\ B &= \text{„Die zweite Augenzahl ist gerade. “} \\ C &= \text{„Die Summe der Augenzahlen ist ungerade. “} \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Ereignisse A, B, C paarweise stochastisch unabhängig (also jeweils zwei der Ereignisse sind stochastisch unabhängig), aber nicht gemeinsam stochastisch unabhängig sind.

Lösung:

(a) Für $A \in \mathcal{A}$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap \emptyset) &= \mathbb{P}(\emptyset) = 0 = \mathbb{P}(A) \cdot 0 = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(\emptyset), \\ \mathbb{P}(A \cap \Omega) &= \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A) \cdot 1 = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(\Omega). \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $A, \emptyset$ bzw. A, Ω stochastisch unabhängig.

(b) Seien A, B, C gemeinsam stochastisch unabhängig.
$\Longrightarrow$ A, B stochastisch unabhängig.
Es gilt

$$\mathbb{P}((A \cap B) \cap C) = \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \underset{\text{stoch. unabh.}}{\overset{A,B,C}{=}} \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C) \underset{\text{stoch. unabh.}}{\overset{A,B}{=}} \mathbb{P}(A \cap B) \cdot \mathbb{P}(C).$$

$\Longrightarrow$ $(A \cap B), C$ stochastisch unabhängig.

Um zu zeigen, dass $A \cup B$ und C stochastisch unabhängig sind, gibt es zwei Möglichkeiten:

- A, B, C stochastisch unabhängig $\overset{\text{Satz 2.13}}{\Longrightarrow}$ A^c, B^c, C gemeinsam stochastisch unabhängig
$\Longrightarrow$ A^c, B^c stochastisch unabhängig und

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((A \cup B)^c \cap C) &= \mathbb{P}(A^c \cap B^c \cap C) = \mathbb{P}(A^c) \cdot \mathbb{P}(B^c) \cdot \mathbb{P}(C) \\ &= \mathbb{P}(A^c \cap B^c) \cdot \mathbb{P}(C) = \mathbb{P}((A \cup B)^c) \cdot \mathbb{P}(C). \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $(A \cup B)^c, C$ stochastisch unabhängig
$\overset{\text{Satz 2.13}}{\Longrightarrow}$ $(A \cup B), C$ stochastisch unabhängig.

► Es ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}((A\cup B)\cap C) &= \mathbb{P}((A\cap C)\cup(B\cap C))\\
&= \mathbb{P}(A\cap C)+\mathbb{P}(B\cap C)-\mathbb{P}((A\cap C)\cap(B\cap C))\\
&= \mathbb{P}(A\cap C)+\mathbb{P}(B\cap C)-\mathbb{P}(A\cap B\cap C)\\
&\overset{\text{stoch. unabh.}}{=} \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(C)+\mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(C)\\
&\overset{A,B\text{ stoch. unabh.}}{=} (\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B))\cdot\mathbb{P}(C)\\
&= \mathbb{P}(A\cup B)\cdot\mathbb{P}(C).
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $(A\cup B), C$ stochastisch unabhängig.

(c) Wir modellieren einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ wie folgt:

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}^2=\{(w_1,w_2): w_i\in\{1,2,3,4,5,6\} \text{ für } i=1,2\},\qquad \mathcal{A}=\mathcal{P}(\Omega),$$

wobei $\mathbb{P}$ die Laplace-Verteilung auf $\mathcal{A}$ ist.
Damit ist jedes Ergebnis der beiden Würfelwürfe gleichwahrscheinlich und es wird der Unabhängigkeit der beiden Würfe Rechnung getragen.
Für ein Element $(w_1,w_2)\in\Omega$ ist w_1 das Ergebnis des ersten Wurfes und w_2 das Ergebnis des zweiten Wurfes.
Nun gilt

$$\begin{aligned}
A &= \{2,4,6\}\times\{1,2,3,4,5,6\}, \quad |A|=18,\\
B &= \{1,2,3,4,5,6\}\times\{2,4,6\}, \quad |B|=18.
\end{aligned}$$

und

$$C=(\{2,4,6\}\times\{1,3,5\})\cup(\{1,3,5\}\times\{2,4,6\}),\quad |C|=18.$$

Wir erhalten nun

$$\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(\{2,4,6\}^2)=\frac{9}{36}=\frac{18}{36}\cdot\frac{18}{36}=\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B).$$

$\Longrightarrow$ A,B stochastisch unabhängig.
Weiter haben wir

$$\mathbb{P}(A\cap C)=\mathbb{P}(\{2,4,6\}\times\{1,3,5\})=\frac{9}{36}=\frac{18}{36}\cdot\frac{18}{36}=\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(C).$$

$\Longrightarrow$ A,C sind stochastisch unabhängig. Analog gehen wir bei B,C vor.
Allerdings gilt

$$\mathbb{P}(A\cap B\cap C)=\mathbb{P}(\emptyset)=0\neq\frac{1}{8}=\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(C),$$

$\Longrightarrow$ A,B,C sind nicht gemeinsam unabhängig.

Aufgabe 7 (Bedingte Wahrscheinlichkeit und stochastische Unabhängigkeit, 4 = 1 + 1 + 1 + 1 Punkte).

Sie wissen, dass der Marsmensch von nebenan zwei Kinder hat, die keine Zwillinge sind.
Marsmenschen haben entweder rotes oder grünes Haar. Es ist gleichwahrscheinlich, ob ein Marsmensch mit rotem oder grünem Haar geboren wird, und an welchem Wochentag (Montag bis Sonntag) dies geschieht.
Bevor der Marsmensch sein Zuhause verlässt, entscheidet er sich mit gleicher Wahrscheinlichkeit, welches seiner beiden Kinder er mitnehmen wird. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kinder rotes Haar haben? Berechnen Sie diese Wahrscheinlichkeit, wenn

(a) Sie keine zusätzlichen Informationen haben.

(b) Sie dem Marsmenschen mit einem seiner Kinder begegnen, welches rote Haare hat.

(c) Sie dem Marsmenschen mit einem seiner Kinder begegnen, welches rote Haare hat, und er sagt: „Das ist mein erstgeborenes Kind“.

(d) Sie dem Marsmenschen mit einem seiner Kinder begegnen, welches rote Haare hat, und er sagt: „Mein Kind ist an einem Sonntag geboren worden“.

Hinweis: Definieren Sie Ereignisse $A_1 =$ *„Das erste Kind hat rotes Haar.“ und* $B_1 =$ *„Das erste Kind wurde an einem Sonntag geboren.“. Analog dazu definieren Sie* A_2, B_2 *für das zweite Kind. Nehmen Sie an, dass die vier Ereignisse gemeinsam stochastisch unabhängig sind. Für (b) und (d) betrachten Sie ein weiteres von den anderen Ereignissen unabhängiges Ereignis* $W_1 =$ *„Der Marsmensch wählt vor dem Verlassen des Zuhauses das erstgeborene Kind aus.“. Drücken Sie dann die gesuchten Wahrscheinlichkeiten als bedingte Wahrscheinlichkeiten mit den obigen Ereignissen aus.*

Lösung:

Zunächst führen wir wie im Hinweis vorgegeben die folgenden Ereignisse ein:

$$\begin{aligned}
A_1 &:= \text{„Das erste Kind hat rote Haare“}\\
A_2 &:= \text{„Das zweite Kind hat rote Haare“}\\
B_1 &:= \text{„Das erste Kind wurde an einem Sonntag geboren“}\\
B_2 &:= \text{„Das zweite Kind wurde an einem Sonntag geboren“}
\end{aligned}$$

Beachte, dass alle 4 Ereignisse gemeinsam stochastisch unabhängig sind.
Außerdem gilt laut Aufgabenstellung (Vorkommen rotes / grünes Haar ist gleichwahrscheinlich, jeder Wochentag für eine Geburt ist gleichwahrscheinlich)

$$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(B_2) = \frac{1}{7}.$$

Gesucht ist jeweils die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $A_1 \cap A_2$ (beide Kinder haben rotes Haar), unter verschiedenen gegebenen Informationen, die wir als bedingte Wahrscheinlichkeiten auffassen müssen.
Wir diskutieren zuerst die Teilaufgaben (a) und (c).

(a) Hier ist keine Information gegeben. Daher folgt

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{4}.$$

(c) Hier ist gegeben, dass das erste Kind rote Haare hat, was dem Ereignis A_1 entspricht. Wir erhalten

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \mid A_1) = \frac{\mathbb{P}((A_1 \cap A_2) \cap A_1)}{\mathbb{P}(A_1)} = \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}{\mathbb{P}(A_1)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Wir hätten auch auf $A_1 \cap W_1$ bedingen können und würden dasselbe Ergebnis erhalten. Anschaulich spielt das Ereignis W_1 hier keine Rolle.

Wir diskutieren nun die Teilaufgaben (b) und (d).
Der Marsmensch hat eines seiner Kinder morgens ausgewählt und dieses hat rote Haare. In diesem Fall führen wir ein weiteres, von den anderen Ereignissen unabhängiges Ereignis ein:

W_1 := „Der Marsmensch wählt vor dem Verlassen des Zuhauses das erstgeborene Kind aus.“

Wir nehmen an, dass Marsmensch jedes seiner Kinder mit gleicher Wahrscheinlichkeit auswählt, d.h. $\mathbb{P}(W_1) = \frac{1}{2}$. Dann entspricht die gegebene Information dem Ereignis $(A_1 \cap W_1) \cup (A_2 \cap W_1^c)$ (das erste Kind hat rotes Haar und wird mitgenommen, oder das zweite Kind hat rotes Haar und wird mitgenommen).

(b) Entsprechend ist hier

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \ \mid \ (A_1 \cap W_1) \cup (A_2 \cap W_1^c)) &= \frac{\mathbb{P}((A_1 \cap A_2) \cap ((A_1 \cap W_1) \cup (A_2 \cap W_1^c)))}{\mathbb{P}((A_1 \cap W_1) \cup (A_2 \cap W_1^c))} \\
&= \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}{\mathbb{P}((A_1 \cap W_1) \cup (A_2 \cap W_1^c))}.
\end{aligned}$$

Unter Nutzung des Ergebnisses aus (a) und der allgemeingültigen Formel

$$\mathbb{P}((A_1 \cap W_1) \cup (A_2 \cap W_1^c)) = \mathbb{P}(A_1 \cap W_1) + \mathbb{P}(A_2 \cap W_1^c) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap W_1 \cap W_1^c)$$

erhalten wir

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \ \mid \ (A_1 \cap W_1) \cup (A_2 \cap W_1^c)) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - 0} = \frac{1}{2}.$$

(d) Der Marsmensch hat eines seiner Kinder morgens ausgewählt, dieses hat rote Haare und es wurde an einem Sonntag Geburtstag geboren.
Dies entspricht dem Ereignis $(A_1 \cap W_1 \cap B_1) \cup (A_2 \cap W_1^c \cap B_2)$ (Das erste Kind hat rote Haare und wurde mitgenommen und hat am Sonntag Geburtstag, oder das zweite Kind hat diese Eigenschaften). Daher ergibt sich

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \mid \ (A_1 \cap W_1 \cap B_1) \cup (A_2 \cap W_1^c \cap B_2)) = \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap ((B_1 \cap W_1) \cup (B_2 \cap W_1^c)))}{\mathbb{P}((A_1 \cap W_1^c \cap B_1) \cup (A_2 \cap W_1^c \cap B_2))}.$$

Unter erneuter Nutzung der allgemeingültigen Formel

$$\mathbb{P}(X \cup Y) = \mathbb{P}(X) + \mathbb{P}(Y) - \mathbb{P}(X \cap Y)$$

und der stochastischen Unabhängigkeit der Ereignisse erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap ((B_1 \cap W_1) \cup (B_2 \cap W_1^c))) &= \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}((B_1 \cap W_1) \cup (B_2 \cap W_1^c)) \\
&= \frac{1}{4} \cdot \Big(\mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(W_1) + \mathbb{P}(B_2)\mathbb{P}(W_1^c) - \mathbb{P}(\emptyset)\Big) \\
&= \frac{1}{4} \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} - 0\right) = \frac{1}{4 \cdot 7},
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}((A_1 \cap W_1 \cap B_1) \cup (A_2 \cap W_1^c \ \cap B_2)) &= \mathbb{P}(A_1 \cap W_1 \cap B_1) + \mathbb{P}(A_2 \cap W_1^c \cap B_2) - \mathbb{P}(\emptyset) \\
&= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} - 0 = \frac{1}{2 \cdot 7}.
\end{aligned}$$

Insgesamt also

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \mid \ (A_1 \cap W_1 \cap B_1) \cup (A_2 \cap W_1^c \cap B_2)) = \frac{\frac{1}{4 \cdot 7}}{\frac{1}{2 \cdot 7}} = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 8 (Formel von Bayes und der totalen W'keit, 4 = 2 + 2 Punkte).

In London regnet es an einem Tag mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. Die Wettervorhersage stimmt in $\frac{2}{3}$ aller Fälle$^{(*)}$. Wenn Regen vorhergesagt ist, nimmt Mr. Pickwick einen Schirm mit; ist kein Regen vorhergesagt, macht er dies mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3}$.

(a) Es regnet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Mr. Pickwick keinen Schirm dabei?

(b) Es regnet nicht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Mr. Pickwick seinen Schirm dabei?

Bemerkung zu $(*)$***:*** *Das bedeutet: wenn es regnet, stimmt die Vorhersage mit Wahrscheinlichkeit* $\frac{2}{3}$*, und wenn es nicht regnet, stimmt die Vorhersage mit Wahrscheinlichkeit* $\frac{2}{3}$*.*
Hinweis: *Definieren Sie zunächst* R, V, S *als die Ereignisse, dass es regnet, dass die Wettervorhersage stimmt, und dass Mr. Pickwick seinen Schirm mitnimmt. Drücken Sie dann die gesuchten Wahrscheinlichkeiten als bedingte Wahrscheinlichkeiten mit* R, V, S *aus. Es kann hilfreich sein, zur Übersicht ein Baumdiagramm mit den bekannten Wahrscheinlichkeiten anzufertigen.*

Lösung:

Wir definieren drei Ereignisse

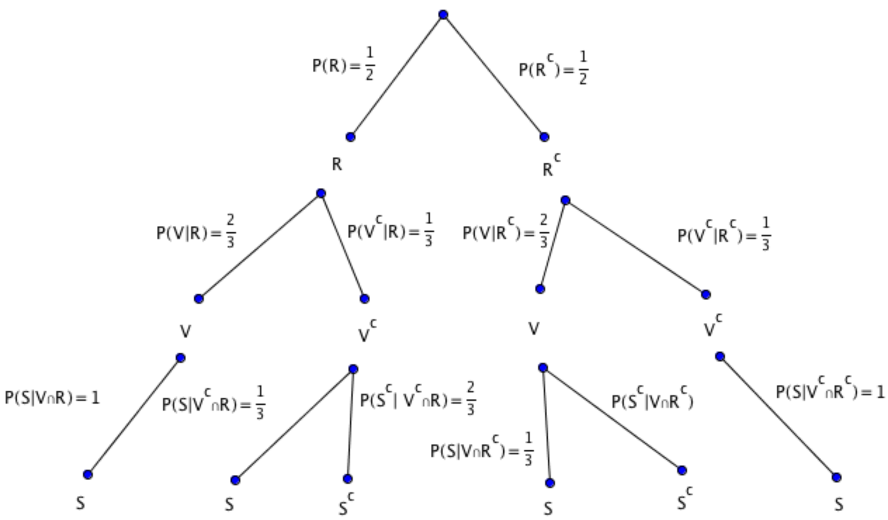
$$\begin{aligned} R &= \text{„In London regnet es an einem Tag.“}, \\ V &= \text{„Die Wettervorhersage stimmt.“}, \\ S &= \text{„Mr. Pickwick nimmt seinen Schirm mit.“}. \end{aligned}$$

In der Aufgabenstellung sind uns Wahrscheinlichkeiten gegeben. Dabei ist zu beachten:

- „Die Wettervorhersage stimmt in $\frac{2}{3}$ aller Fälle“ bedeutet: Die Wettervorhersage stimmt mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$, wenn es regnet; und die Wettervorhersage stimmt mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$, wenn es nicht regnet.

- „Wenn Regen vorhergesagt ist, nimmt Mr. Pickwick einen Schirm mit“ bedeutet: Egal ob es regnet oder nicht, wenn Regen vorhergesagt ist, nimmt Mr. Pickwick seinen Schirm mit.

Damit ergibt sich folgender Baum:



Sei nun $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit $R, S, V \in \mathcal{A}$ und $\mathbb{P}$ so, dass die Wahrscheinlichkeiten wie oben gelten.

(a) Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass Mr. Pickwick seinen Schirm nicht mitnimmt, gegeben es regnet

$$\mathbb{P}(S^c|R) = \frac{\mathbb{P}(S^c \cap R)}{\mathbb{P}(R)} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{9},$$

wobei

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S^c \cap R) &= \mathbb{P}(S^c \cap V \cap R) + \mathbb{P}(S^c \cap V^c \cap R) \\
&= \mathbb{P}(S^c|V \cap R) \cdot \mathbb{P}(V \cap R) + \mathbb{P}(S^c|V^c \cap R) \cdot \mathbb{P}(V^c \cap R) \\
&= \mathbb{P}(S^c|V \cap R) \cdot \mathbb{P}(V|R) \cdot \mathbb{P}(R) + \mathbb{P}(S^c|V^c \cap R) \cdot \mathbb{P}(V^c|R) \cdot \mathbb{P}(R) \\
&= 0 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{9}.
\end{aligned}$$

(b) Die Wahrscheinlichkeit, dass Mr. Pickwick seinen Schirm mitnimmt, gegeben es regnet nicht, ist

$$\mathbb{P}(S|R^c) = \frac{\mathbb{P}(S \cap R^c)}{\mathbb{P}(R^c)} = \frac{\frac{5}{18}}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{9},$$

wobei

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S \cap R^c) &= \mathbb{P}(S \cap V \cap R^c) + \mathbb{P}(S \cap V^c \cap R^c) \\
&= \mathbb{P}(S|V \cap R^c) \cdot \mathbb{P}(V \cap R^c) + \mathbb{P}(S|V^c \cap R^c) \cdot \mathbb{P}(V^c \cap R^c) \\
&= \mathbb{P}(S|V \cap R^c) \cdot \mathbb{P}(V|R^c) \cdot \mathbb{P}(R^c) + \mathbb{P}(S|V^c \cap R^c) \cdot \mathbb{P}(V^c|R^c) \cdot \mathbb{P}(R^c) \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{18}.
\end{aligned}$$

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **31. Oktober 2019, 11:00 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/ews-WS1920/index.html`