UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Nathawut Phandoidaen
Wintersemester 2019/2020

2. Übungsblatt

Aufgabe 5	Aufgabe 6	Aufgabe 7	Aufgabe 8	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 5 (Bedingte Wahrscheinlichkeiten als W'verteilungen, 4 = 2 + 2 Punkte).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

(a) Sei $B \in \mathcal{A}$ mit $\mathbb{P}(B) > 0$. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\,\cdot\,|\,B) : \mathcal{A} &\to [0,1] \\ A &\mapsto \mathbb{P}(A \mid B) \end{aligned}$$

eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\Omega, \mathcal{A}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}(A\,|\,\cdot\,)$ für ein $A \in \mathcal{A}$ im Allgemeinen keine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $(\Omega, \mathcal{A})$ ist, indem Sie ein geeignetes Gegenbeispiel angeben.

Aufgabe 6 (Stochastische Unabhängigkeit, 4 = 1 + 1 + 2 Punkte).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B, C \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie:

(a) Die Ereignisse $\emptyset$ und Ω sind von jedem Ereignis A stochastisch unabhängig.

(b) Sind A, B, C gemeinsam stochastisch unabhängig, so sind sowohl $A \cap B$ und C als auch $A \cup B$ und C jeweils stochastisch unabhängig.

(c) Ein (fairer) Würfel, bei welchem die Augenzahlen von 1 bis 6 gleichwahrscheinlich sind, wird zweimal unabhängig voneinander geworfen. Wir definieren die folgenden Ereignisse:

$$\begin{aligned} A &= \text{„Die erste Augenzahl ist gerade. “} \\ B &= \text{„Die zweite Augenzahl ist gerade. “} \\ C &= \text{„Die Summe der Augenzahlen ist ungerade. “} \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Ereignisse A, B, C paarweise stochastisch unabhängig (also jeweils zwei der Ereignisse sind stochastisch unabhängig), aber nicht gemeinsam stochastisch unabhängig sind.

Aufgabe 7 (Bedingte Wahrscheinlichkeit und stochastische Unabhängigkeit, 4 = 1 + 1 + 1 + 1 Punkte).

Sie wissen, dass der Marsmensch von nebenan zwei Kinder hat, die keine Zwillinge sind. Marsmenschen haben entweder rotes oder grünes Haar. Es ist gleichwahrscheinlich, ob ein Marsmensch mit rotem oder grünem Haar geboren wird, und an welchem Wochentag (Montag bis Sonntag) dies geschieht.
Bevor der Marsmensch sein Zuhause verlässt, entscheidet er sich mit gleicher Wahrscheinlichkeit, welches seiner beiden Kinder er mitnehmen wird. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kinder rotes Haar haben? Berechnen Sie diese Wahrscheinlichkeit, wenn

(a) Sie keine zusätzlichen Informationen haben.

(b) Sie dem Marsmenschen mit einem seiner Kinder begegnen, welches rote Haare hat.

(c) Sie dem Marsmenschen mit einem seiner Kinder begegnen, welches rote Haare hat, und er sagt: „Das ist mein erstgeborenes Kind“.

(d) Sie dem Marsmenschen mit einem seiner Kinder begegnen, welches rote Haare hat, und er sagt: „Mein Kind ist an einem Sonntag geboren worden“.

Hinweis: Definieren Sie Ereignisse A_1 = „Das erste Kind hat rotes Haar.“ und B_1 = „Das erste Kind wurde an einem Sonntag geboren.“. Analog dazu definieren Sie A_2, B_2 für das zweite Kind. Nehmen Sie an, dass die vier Ereignisse gemeinsam stochastisch unabhängig sind. Für (b) und (d) betrachten Sie ein weiteres von den anderen Ereignissen unabhängiges Ereignis W_1 = „Der Marsmensch wählt vor dem Verlassen des Zuhauses das erstgeborene Kind aus.“. Drücken Sie dann die gesuchten Wahrscheinlichkeiten als bedingte Wahrscheinlichkeiten mit den obigen Ereignissen aus.

Aufgabe 8 (Formel von Bayes und der totalen W'keit, 4 = 2 + 2 Punkte).

In London regnet es an einem Tag mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. Die Wettervorhersage stimmt in $\frac{2}{3}$ aller Fälle$^{(*)}$. Wenn Regen vorhergesagt ist, nimmt Mr. Pickwick einen Schirm mit; ist kein Regen vorhergesagt, macht er dies mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3}$.

(a) Es regnet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Mr. Pickwick keinen Schirm dabei?

(b) Es regnet nicht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Mr. Pickwick seinen Schirm dabei?

Bemerkung zu $(*)$***:*** *Das bedeutet: wenn es regnet, stimmt die Vorhersage mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$, und wenn es nicht regnet, stimmt die Vorhersage mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$.*
Hinweis: *Definieren Sie zunächst R, V, S als die Ereignisse, dass es regnet, dass die Wettervorhersage stimmt, und dass Mr. Pickwick seinen Schirm mitnimmt. Drücken Sie dann die gesuchten Wahrscheinlichkeiten als bedingte Wahrscheinlichkeiten mit R, V, S aus. Es kann hilfreich sein, zur Übersicht ein Baumdiagramm mit den bekannten Wahrscheinlichkeiten anzufertigen.*

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **31. Oktober 2019, 11:00 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/ews-WS1920/index.html`