UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT
SEIT 1386

Einführung in die
Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Nathawut Phandoidaen
Wintersemester 2019/2020

1. Übungsblatt – Lösungen

Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 1 (Eigenschaften einer W'verteilung, 4 = 1 + 1.5 + 1.5 Punkte).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B, A_n \in \mathcal{A}$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) **Monotonie**: $A \subseteq B \implies \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

(b) **Subadditivität**: $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$

(c) **Stetigkeit des Maßes von unten**:
Gilt $A_n \subseteq A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$

Hinweis für (b) und (c): Definieren Sie $B_n := A_n \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right)$ und drücken Sie $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ mittels der B_n aus. Nutzen Sie dann Eigenschaft (iii) eines Wahrscheinlichkeitsmaßes.

Lösung:
Nach den Axiomen von Kolmogorov erfüllt ein Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathbb{P}$ die Eigenschaften:

(i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

(ii) $\mathbb{P}(A) \geq 0$ für alle $A \in \mathcal{A}$

(iii) $\mathbb{P}\left(\dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$ für alle paarweise disjunkten $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$

(a) Sei $A \subseteq B$. Dann gilt $B = A \dot{\cup} (B \setminus A)$, wobei die Vereinigung disjunkt ist. Damit gilt

$$\mathbb{P}(A) \overset{\text{(ii)}}{\leq} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}((B \setminus A)) \overset{\text{(iii)}}{=} \mathbb{P}(A \dot{\cup} (B \setminus A)) = \mathbb{P}(B)$$

(b) Wir wollen Eigenschaft (iii) einer W'verteilung verwenden und müssen disjunkte Mengen erzeugen. Dies gelingt mit dem Hinweis.
Definiere $B_n := A_n \setminus \left(\cup_{k=1}^{n-1} A_k\right)$.
Per Konstruktion sind die B_n für $n \in \mathbb{N}$ alle paarweise disjunkt, es gilt

$$\dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \qquad (*)$$

und $B_n = A_n \setminus \left(\cup_{k=1}^{n-1} A_k\right) \subseteq A_n$. Es folgt

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \overset{(*)}{=} \mathbb{P}\left(\dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} B_n\right) \overset{\text{(iii)}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_n) \overset{\text{(a)}, B_n \subseteq A_n}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

(c) Definiere $B_n := A_n \setminus \left(\cup_{k=1}^{n-1} A_k\right)$.
Dann gilt

$$\forall\, N \in \mathbb{N} : \dot{\bigcup}_{n=1}^{N} B_n = \bigcup_{n=1}^{N} A_n \overset{A_n \subseteq A_{n+1}}{=} A_N \qquad \text{und} \qquad \dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n. \qquad (**)$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &\overset{(**)}{=} \mathbb{P}\left(\dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} B_n\right) \overset{\text{(iii)}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_n) \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(B_n) \overset{\text{(iii)}}{=} \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(\dot{\bigcup}_{n=1}^{N} B_n\right) \overset{(**)}{=} \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(A_N) \end{aligned}$$

Der Limes existiert, da es sich um monoton wachsende, nach oben durch 1 beschränkte Folgen handelt.

Aufgabe 2 (Wahrscheinichkeit nichtdisjunkter Vereinigungen, 4 Punkte).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. In dieser Aufgabe beweisen wir eine Verallgemeinerung der Formel

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B). \qquad (*)$$

Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \left((-1)^{j-1} \cdot \sum_{\{k_1,...,k_j\} \subseteq \{1,...,n\}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap ... \cap A_{k_j}) \right)$$

Hierbei wird in der inneren Summe über alle möglichen Indizes $k_1, ..., k_j$ summiert, sodass $\{k_1, ..., k_j\} \subseteq \{1, ..., n\}$.
Hinweis: Nutzen Sie vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}$ und $(*)$ im Induktionsschritt.

Lösung:
Wir beweisen mittels vollständiger Induktion nach $n \in \mathbb{N}$ die Aussage

$$A(n): \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \left((-1)^{j-1} \cdot \sum_{\{k_1,...,k_j\} \subseteq \{1,...,n\}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap ... \cap A_{k_j}) \right) \forall\, n \in \mathbb{N}, A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}.$$

- **Induktionsanfang**, $A(1)$:
  Es gilt
  $$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{1} A_j\right) = \mathbb{P}(A_1) = \sum_{\{k_1\} \subseteq \{1\}} \mathbb{P}(A_{k_1}).$$
- **Indukstionsvoraussetzung**: Es gelte $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

- **Induktionsschritt**, $A(n) \implies A(n+1)$:
  Es gilt

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n+1} A_j\right) = \mathbb{P}\left(A_{n+1} \cup \bigcup_{j=1}^{n} A_j\right)$$

mit $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ und $A_{n+1} \cap \bigcup_{j=1}^{n} A_j = \bigcup_{j=1}^{n}(A_j \cap A_{n+1})$:

$$= \mathbb{P}(A_{n+1}) + \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) - \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n}(A_j \cap A_{n+1})\right)$$

über die **Induktionsvoraussetzung** auf den 2. und 3. Summanden angewandt sowie $(A_{k_1} \cap A_{n+1}) \cap ... \cap (A_{k_j} \cap A_{n+1}) = A_{k_1} \cap ... \cap A_{k_j} \cap A_{n+1}$ für den 3. Summanden:

$$\begin{aligned} &= \mathbb{P}(A_{n+1}) + \sum_{j=1}^{n}\left((-1)^{j-1} \sum_{\{k_1,...,k_j\} \subseteq \{1,...,n\}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap ... \cap A_{k_j})\right) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{n}\left((-1)^{j-1} \sum_{\{k_1,...,k_j\} \subseteq \{1,...,n\}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap ... \cap A_{k_j} \cap A_{n+1})\right) \end{aligned}$$

mittels Indexverschiebung $j = 1, ..., n$ zu $j = 2, ..., n+1$ bei der 2. großen Summe:

$$\begin{aligned} &= \mathbb{P}(A_{n+1}) + \sum_{j=1}^{n}\left((-1)^{j-1} \sum_{\{k_1,...,k_j\} \subseteq \{1,...,n\}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap ... \cap A_{k_j}\right) \\ &\quad + \sum_{j=2}^{n+1}\left((-1)^{j-1} \sum_{\{k_1,...,k_{j-1}\} \subseteq \{1,...,n\}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap ... \cap A_{k_{j-1}} \cap A_{n+1})\right) \end{aligned}$$

Neuinterpretion der großen Summen; Entfernen der Summanden für $j = n+1$ und Hinzufügen von $\mathbb{P}(A_{n+1})$ als Summanden für $j = 1$ in der zweiten großen Summe:

$$\begin{aligned} &= (-1)^n \mathbb{P}(A_1 \cap ... \cap A_{n+1}) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n}\left((-1)^{j-1} \sum_{\substack{\{k_1,...,k_j\} \subseteq \{1,...,n,n+1\} \\ n+1 \notin \{k_1,...,k_j\}}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap ... \cap A_{k_j})\right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n}\left((-1)^{j-1} \sum_{\substack{\{k_1,...,k_j\} \subseteq \{1,...,n,n+1\} \\ n+1 \in \{k_1,...,k_j\}}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap ... \cap A_{k_j})\right) \end{aligned}$$

fasse die beiden großen Summen zu einer Summe zusammen:

$$\begin{aligned} &= (-1)^n \mathbb{P}(A_1 \cap ... \cap A_{n+1}) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n}\left((-1)^{j-1} \sum_{\{k_1,...,k_j\} \subseteq \{1,...,n+1\}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap ... \cap A_{k_j})\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n+1}\left((-1)^{j-1} \sum_{\{k_1,...,k_j\} \subseteq \{1,...,n+1\}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap ... \cap A_{k_j})\right). \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (Aufstellen w'theoretischer Modelle, 4 = 2 + 2 Punkte).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, wobei $\mathbb{P}$ als Laplace-Verteilung festgelegt wird. Geben Sie bei den folgenden Aufgaben jeweils einen Stichprobenraum Ω an. Dieser soll so gewählt sein, dass alle in der Aufgabenstellung relevanten Ereignisse in $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ enthalten sind und $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ die Situation aus der Aufgabenstellung vollständig modelliert.
Berechnen Sie dann die Wahrscheinlichkeiten der gegebenen Ereignisse.

(a) Wir haben einen Würfel, bei dem jede Zahl von 1 bis 6 mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftritt. Wir würfeln mit diesem Würfel dreimal. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass

  (i) bei allen drei Würfen *nur gerade* Zahlen gewürfelt werden?

  (ii) die *Summe der drei Würfe* 6 beträgt?

(b) Wir haben eine Studie mit 60 Personen, von denen 20 erkrankt sind. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass

  (i) von 10 zufällig ausgewählten Personen *genau* 3 Personen krank sind?

  (ii) von 10 zufällig ausgewählten Personen *mindestens* eine Person krank ist?

Lösung:

(a) Wir wählen

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^3 = \{(w_1, w_2, w_3) : w_i \in \{1,2,3,4,5,6\} \text{ für } i = 1,2,3\}.$$

Ein Elementarereignis $(w_1, w_2, w_3) \in \Omega$ entspricht dabei anschaulich der Situation, dass beim ersten Würfelwurf w_1 gewürfelt wurde, beim zweiten Würfelwurf w_2 und beim dritten Würfelwurf w_3.
Da jede Zahl bei dem Würfel mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftritt, haben auch alle möglichen Ergebnisse bei drei Würfelwürfen die gleiche Wahrscheinlichkeit, d.h. jedes $(w_1, w_2, w_3) \in \Omega$ tritt mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auf.
Daher wird durch den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit der Laplace-Verteilung $\mathbb{P}$ die vorliegende Situation vollständig modelliert.

  (i) Das gesuchte Ereignis ist

$$\begin{aligned} A &= \text{„bei allen drei Würfen werden nur gerade Zahlen gewürfelt“} \\ &= \{2,4,6\}^3 = \{(w_1, w_2, w_3) \in \Omega : w_i \in \{2,4,6\} \text{ für } i = 1,2,3\}. \end{aligned}$$

  Da $\mathbb{P}$ die Laplace-Verteilung ist, gilt

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3^3}{6^3} = \frac{1}{8} = 0.125.$$

  Die Zahl $|\Omega|$ entspricht der Anzahl der Möglichkeiten, aus 6 verschiedenen Zahlen 3 Zahlen zu ziehen (mit Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge (im Tripel)). Daher ist $|\Omega| = 6^3$. Analoge Überlegungen gelten für $|A|$.

  (ii) Das gesuchte Ereignis ist

$$\begin{aligned} A &= \text{„die Summe der drei Würfe beträgt 6“} \\ &= \{(w_1, w_2, w_3) \in \Omega : w_1 + w_2 + w_3 = 6\}. \end{aligned}$$

Da $\mathbb{P}$ die Laplace-Verteilung ist, gilt wieder

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{6^3}.$$

Es bleibt $|A|$ zu bestimmen. Dies kann durch zwei Möglichkeiten erfolgen:

- Explizite Aufzählung aller Elemente, was im Allgemeinen sehr aufwendig ist:

$$\begin{aligned} A &= \{(1,1,4),(1,2,3),(1,3,2),(1,4,1),(2,1,3),\\ &\qquad (2,2,2),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1),(4,1,1)\}, \end{aligned}$$

  $\Longrightarrow |A| = 10.$

- Kombinatorik: Die Summe der drei Zahlen w_1, w_2, w_3 soll 6 sein.
  Die Anzahl der Möglichkeiten kann durch folgendes äquivalentes Problem erhalten werden: *Wähle 3 Einsen aus 3 Eimern (am Ende des Experiments sind also 3 Einsen irgendwie in 3 Eimern verteilt. Die Anzahl der Einsen in Eimer 1 entspricht $w_1 - 1$, die Anzahl der Einsen in Eimer 2 entspricht $w_2 - 1$, usw. In diesem Sinne sind die Probleme äquivalent).*
  Diese Wahl erfolgt mit Zurücklegen (mehrere Einsen in einen Eimer), aber ohne Beachtung der Reihenfolge (am Ende zählt nur, wie viele Einsen in einem Eimer sind, aber nicht in welcher Reihenfolge die Einsen in die Eimer gekommen sind). Daher ist

$$|A| = \binom{3+3-1}{3} = \binom{5}{3} = 10.$$

Das heißt also $\mathbb{P}(A) = \frac{10}{6^3}$.

(b) Vergleiche mit *Beispiel 1.8 (Schätzung eines Wildbestandes).*
Seien $p_1, ..., p_{60}$ die 60 Personen. Wir nehmen an, dass $p_1, ..., p_{20}$ die kranken Personen sind. (Wir können die Personen bezeichnen wir wollen. Es ist keine Einschränkung, wenn wir annehmen, dass die ersten 20 Personen krank sind).
Wir wählen nun

$$\Omega = \{N \subset \{p_1, ..., p_{60}\} : |N| = 10\}.$$

Ein Element $A = \{w_1, ..., w_{10}\} \in \Omega$ entspricht also den 10 zufällig ausgewählte Personen. Da jede Person mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gezogen wird, werden die auftretenden Wahrscheinlichkeiten in der Aufgabenstellung durch einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit der Laplace-Verteilung $\mathbb{P}$ vollständig modelliert.

(i) Das gesuchte Ereignis ist

$$\begin{aligned} A &= \text{„3 der 10 zufällig ausgewählten Personen sind krank“}\\ &= \{N \in \Omega : |\{p_1, ..., p_{20}\} \cap N| = 3\}\\ &\overset{N\in\Omega}{=} \{N \in \Omega : |\{p_1, ..., p_{20}\} \cap N| = 3, |\{p_{21}, ..., p_{60}\} \cap N| = 7\} \end{aligned}$$

Da $\mathbb{P}$ die Laplace-Verteilung ist, gilt

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Es gilt $|\Omega| = \binom{60}{10}$, da wir die Anzahl der Möglichkeiten aus 60 Personen davon 10 Personen auszuwählen, suchen. Diese Wahl erfolgt ohne Beachtung der Reihenfolge

und ohne Zurücklegen.
Für $|A|$ halten wir zunächst fest, dass die Auswahl von den 3 kranken Personen unabhängig von der Auswahl der 7 gesunden Personen erfolgt. Daher können wir die Berechnung der Anzahl der Elemente von A auf die Berechnung zweier kleinerer Mengen zurückführen, d.h.

$$\begin{aligned} |A| &= |(\{N \subset \{p_1, ..., p_{20}\} : |N| = 3\})| \cdot |\{N \subset \{p_{21}, ..., p_{60}\} : |N| = 7\}| \\ &= \binom{20}{3} \cdot \binom{40}{7}. \end{aligned}$$

Die Berechnung der Anzahl der Möglichkeiten erfolgt dabei wie oben bei $|\Omega|$. Wir erhalten

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{20}{3} \cdot \binom{40}{7}}{\binom{60}{10}} \approx 0.282$$

(ii) Das gesuchte Ereignis ist

$$\begin{aligned} A &= \text{„mindestens eine der 10 zufällig ausgewählten Personen ist krank“} \\ &= \{N \in \Omega : |(\{p_1, ..., p_{20}\} \cap N| \geq 1\} \end{aligned}$$

Zur einfacheren Behandlung arbeiten wir mit dem Gegenereignis:

$$\begin{aligned} A^c &= \text{„keine der 10 zufällig ausgewählten Personen ist krank“} \\ &= \{N \in \Omega : |\{p_1, ..., p_{20}\} \cap N| = 0\} \end{aligned}$$

Die Berechnung von $\mathbb{P}(A^c)$ erfolgt nun wie in (i). Wir erhalten

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1 - \frac{|A^c|}{|\Omega|} = 1 - \frac{\binom{20}{0} \cdot \binom{40}{10}}{\binom{60}{10}} \approx 0.989$$

Aufgabe 4 (Kombinatorik, 4 = 1 + 1 + 1 + 1 Punkte).

Nutzen Sie zum Lösen der Aufgaben die kombinatorischen Formeln aus der Vorlesung.

(a) Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür, dass sich eine Gruppe von 10 nichtunterscheidbaren Affen auf 4 Bäume B_1, B_2, B_3, B_4 verteilt?

(b) In einem Fach an der Schule wird ein „Hausheft“ und ein „Schulheft“ geführt. Es gibt Heftumschläge in 7 verschiedenen Farben. Wie viele Möglichkeiten für die Umschläge von Haus- und Schulheft gibt es, wenn sie immer verschiedenfarbig eingebunden werden sollen?

(c) In einem Zimmer gibt es 5 Lampen, die unabhängig voneinander aus und eingeschaltet werden können. Wie viele Arten der Beleuchtung gibt es insgesamt?

(d) Nach einer Lottoziehung (*6 aus 49*) sind die 6 Gewinnzahlen bekannt. Auf wie viele Arten hätte man 6 Zahlen auswählen können, sodass unter ihnen 3 Richtige gewesen wären?

Lösung:

(a) Hier wählen die $r = 10$ Affen aus den $n = 4$ (unterscheidbaren) Bäumen. Da die Affen (Wähler) in der Aufgabenstellung nicht individualisiert werden, erfolgt diese Ziehung ohne Beachtung der Reihenfolge. Am Ende interessiert nur, wie viele Affen auf jedem der 4 Bäume sind, aber nicht, welche Affen das genau sind. Weiterhin erfolgt das Ziehen mit Zurücklegen, weil mehrere Affen denselben Baum auswählen können. Damit ergeben sich

$$\binom{n+r-1}{r} = \binom{13}{10} = 286$$

Möglichkeiten.

(b) Hier wählen die $r = 2$ Hefte aus den $n = 7$ unterscheidbaren Umschlägen. Die zwei Hefte sind induvidualisiert in Haus- und Schulheft (unter Beachtung der Reihnfolge). Wird eien Umschlagsfarbe gewählt, kann diese nicht nochmal verwendet werden (ohne Zurücklegen). Wir erhalten

$$\frac{n!}{(n-r)!} = \frac{7!}{5!} = 7 \cdot 6$$

Möglichkeiten.

(c) Die 5 Lampen haben 2 möglichen Zustände: an bzw. aus. Die Lampen sind individualisiert, da sie an verschiedenen Stellen im Zimmer angebracht sind (unter Beachtung der Reihenfolge). Außerdem kann jede Lampe erneut an bzw. aus sein (mit Zurücklegen). Wir erhalten 2^5 Möglichkeiten.

(d) Es sind 49 Zahlen in zwei Gruppen aufgeteilt: 43 Verlierzahlen und 6 Gewinnzahlen. Wie viele Möglichkeiten es gibt, 3 Zahlen aus 43 und 3 Zahlen aus 6 zu ziehen? Die beiden Teilziehungen erfolgen unabhängig, daher können beide Ziehungen einzeln betrachtet werden und die Möglichkeiten müssen multipliziert werden. Die Ziehungen erfolgen ohne Beachtung der Reihenfolge und ohne Zurücklegen. Wir erhalten

$$\binom{43}{3} \cdot \binom{6}{3}$$

Möglichkeiten.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **24. Oktober 2019, 11:00 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Übungsblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/ews-WS1920/index.html`