



## 1. Übungsblatt

Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Summe:

Übungsgruppe:

Tutor(in):

Namen:

### Aufgabe 1 (Eigenschaften einer W'-verteilung, 4 = 1 + 1.5 + 1.5 Punkte).

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $A, B, A_n \in \mathcal{A}$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie:

- (a) **Monotonie:**  $A \subseteq B \implies \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$   
 (b) **Subadditivität:**  $\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$   
 (c) **Stetigkeit des Maßes von unten:**

Gilt  $A_n \subseteq A_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so gilt  $\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n)$

*Hinweis für (b) und (c): Definieren Sie  $B_n := A_n \setminus (\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k)$  und drücken Sie  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  mittels der  $B_n$  aus. Nutzen Sie dann Eigenschaft (iii) eines Wahrscheinlichkeitsmaßes.*

### Aufgabe 2 (Wahrscheinlichkeit nichtdisjunkter Vereinigungen, 4 Punkte).

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum. In dieser Aufgabe beweisen wir eine Verallgemeinerung der Formel

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B). \quad (*)$$

Sei  $n \in \mathbb{N}$  und seien  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ . Zeigen Sie:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n \left( (-1)^{j-1} \cdot \sum_{\{k_1, \dots, k_j\} \subseteq \{1, \dots, n\}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap \dots \cap A_{k_j}) \right)$$

Hierbei wird in der inneren Summe über alle möglichen Indizes  $k_1, \dots, k_j$  summiert, sodass  $\{k_1, \dots, k_j\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ .

*Hinweis: Nutzen Sie vollständige Induktion über  $n \in \mathbb{N}$  und (\*) im Induktionsschritt.*

### Aufgabe 3 (Aufstellen w'theoretischer Modelle, 4 = 2 + 2 Punkte).

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum, wobei  $\mathbb{P}$  als Laplace-Verteilung festgelegt wird. Geben Sie bei den folgenden Aufgaben jeweils einen Stichprobenraum  $\Omega$  an. Dieser soll so gewählt sein, dass alle in der Aufgabenstellung relevanten Ereignisse in  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$  enthalten sind und  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  die Situation aus der Aufgabenstellung vollständig modelliert. Berechnen Sie dann die Wahrscheinlichkeiten der gegebenen Ereignisse.

- (a) Wir haben einen Würfel, bei dem jede Zahl von 1 bis 6 mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftritt. Wir würfeln mit diesem Würfel dreimal. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass
- (i) bei allen drei Würfeln *nur gerade* Zahlen gewürfelt werden?
  - (ii) die *Summe der drei Würfe* 6 beträgt?
- (b) Wir haben eine Studie mit 60 Personen, von denen 20 erkrankt sind. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass
- (i) von 10 zufällig ausgewählten Personen *genau* 3 Personen krank sind?
  - (ii) von 10 zufällig ausgewählten Personen *mindestens* eine Person krank ist?

**Aufgabe 4 (Kombinatorik,  $4 = 1 + 1 + 1 + 1$  Punkte).**

Nutzen Sie zum Lösen der Aufgaben die kombinatorischen Formeln aus der Vorlesung.

- (a) Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür, dass sich eine Gruppe von 10 nichtunterscheidbaren Affen auf 4 Bäume  $B_1, B_2, B_3, B_4$  verteilt?
- (b) In einem Fach an der Schule wird ein „Hausheft“ und ein „Schulheft“ geführt. Es gibt Heftumschläge in 7 verschiedenen Farben. Wie viele Möglichkeiten für die Umschläge von Haus- und Schulheft gibt es, wenn sie immer verschiedenfarbig eingebunden werden sollen?
- (c) In einem Zimmer gibt es 5 Lampen, die unabhängig voneinander aus und eingeschaltet werden können. Wie viele Arten der Beleuchtung gibt es insgesamt?
- (d) Nach einer Lottoziehung (*6 aus 49*) sind die 6 Gewinnzahlen bekannt. Auf wie viele Arten hätte man 6 Zahlen auswählen können, sodass unter ihnen 3 Richtige gewesen wären?

---

**Abgabe:**

In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **24. Oktober 2019, 11:00 Uhr**.  
(Die Zettelkästen für das Übungsblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

**Homepage der Vorlesung:**

<https://ssp.math.uni-heidelberg.de/ews-WS1920/index.html>