

X_1, \dots, X_n Zufallsvariable

DISKRET

$$p(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$$

"gemeinsame Zähl-dichte"

STETIG

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$$

"gemeinsame Verteilungsfunktion"

Gilt mit einer Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

so heißt f "Wahrscheinlichkeitsdichte".

"Randdichten" = "Marginaldichten":

$$p_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2, \dots, x_n} p(x_1, \dots, x_n)$$

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n$$

"alle anderen Variablen heraussummieren / herausintegrieren"

Berechnung Wahrscheinlichkeiten:

$$P((X_1, \dots, X_n) \in A) = \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in A} p(x_1, \dots, x_n)$$

$$P((X_1, \dots, X_n) \in A)$$

$$= \int_A \dots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \dots \int f(x_1, \dots, x_n) \cdot \mathbb{1}_A(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

stochastische Unabhängigkeit:

X_1, \dots, X_n stochastisch unabhängig genau dann, wenn:

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i)$$

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i) \quad \text{bzw.}$$

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i)$$

für alle $(x_1, \dots, x_n) \in \Omega^{X_1} \times \dots \times \Omega^{X_n}$

X, Y stochastisch unabh. $\Rightarrow E[XY] = E[X] \cdot E[Y]$, $\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$