Konvergenzen von Zufallsvariablen

(X_n) Folge von ZV, X ZV auf W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

$X_n \xrightarrow{f.s.} X$

„punktweise Konvergenz"
„fast sichere Konvergenz"

$\exists N \in \mathcal{A}$ mit $\mathbb{P}(N) = 0$:
$X_n(\omega) \to X(\omega)\ \forall \omega \in \Omega \setminus N$

$X_n \xrightarrow{(2)} X$

„Konvergenz in L^2"
„Konvergenz im quadr. Mittel"

$\mathbb{E}\left[(X_n - X)^2\right] \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Tschebyscheff-Ungl.

Gegenbeispiel:
$Y \sim R[0,1]$, $X := 0$,
$X_n := \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(Y) \cdot n$

$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$

„stochastische Konvergenz"

$\forall \varepsilon > 0$:
$\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Schwaches Gesetz der großen Zahlen (SGGZ)

(X_n) iid, $\mathbb{E}[X_n^2] < \infty$
$\Rightarrow \overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}X_i$

Beweis: Tschebyscheff-Ungl.

Continuous Mapping Theorem (CMT)

$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig.
Dann gilt:
$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c \Longrightarrow h(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} h(c)$

„$\Uparrow$" gilt nur für $X \equiv c$ konstant.
Sonst Gegenbeispiel:
$X \sim Bin(1, \frac{1}{2})$
$X_n := 1 - X \sim Bin(1, \frac{1}{2})$

$X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$

„Konvergenz in Verteilung"
„Schwache Konvergenz"

Sind F_{X_n}, F_X Verteilungsfunktionen von X_n bzw. X, muss gelten:

$F_{X_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_X(x)$

für alle Stetigkeitspunkte von F_X

Zentraler Grenzwertsatz (ZGWS)

(X_n) iid, $\mathbb{E}X_i = \mu < \infty$,
$Var(X_i) = \sigma^2 < \infty$

$\Longrightarrow \sqrt{n} \cdot \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1)$

Sätze von Slutzky: (Zusammenhänge schwache / stochastische Konvergenz)

1. $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \Longrightarrow X_n Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$,
2. $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c \Longrightarrow X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X + c$, $X_n Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} c \cdot X$, $\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{\mathcal{D}} \frac{X}{c}$ $(c \neq 0)$