Wahrscheinlichkeitsraum

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

Stichprobenraum | Ereignisraum | W-Maß bzw. W-Verteilung

$\xrightarrow[X]{\text{Zufallsvariable}}$

induzierter W-Raum

$(\Omega^X, \mathcal{A}, \mathbb{P}^X)$

$\Omega^X = \text{Bild}(X) \subseteq \mathbb{R}$; $\mathbb{P}^X$ induzierte W-Verteil.

Ω diskret: $p(k) = \mathbb{P}(\{k\})$ Zähldichte

- $\mathbb{P}^X(A) := \mathbb{P}(X^{-1}(A))$ von X induzierte Vtlg
- $F_X(x) := \mathbb{P}(X \leq x) := \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\})$

Verteilungsfunktion von X

(d.h. monoton wachsend, rechtsseitig stetig, $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$)

Stetige Verteilungen

Verteilung	Wahrscheinl.-dichte	Vtlg.-fkt.
Gleichverteilung $R[a,b]$	$f(x) = \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$	$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x \geq b \end{cases}$
Exponential-Vtlg. $\mathcal{E}(\lambda)$	$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$
Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}$	—

X „diskret" $\Leftrightarrow$ Ω^X diskret: $p^X(x) = \mathbb{P}(X = x)$ Zähldichte

X „stetig" $\Leftrightarrow$ Ω^X überabzählbar/stetig: $\mathbb{P}(X = x) = 0$!

$f: \mathbb{R} \to [0, \infty]$ heißt Wahrscheinlichkeitsdichte von Verteilung $\mathbb{P}^X$, wenn $\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,dy = 1$, und $\mathbb{P}^X((a,b]) = \int_a^b f(y)\,dy$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$.

Die zugehörige Vtlg.-funktion ist dann $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy = \mathbb{P}^X(X \leq x)$.

Transformation von Zufallsvariablen:

- $Y = a \cdot X + b \Rightarrow F_Y(y) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \Rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{a} \cdot f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$
- $Y = g(X)$, g streng monoton + diff'bar $\Rightarrow$ $f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y)) \cdot \left|\frac{d}{dy} g^{-1}(y)\right|, & \text{falls } x \in \Omega^X \text{ ex. mit } g(x) = y \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$