Zusammenhang Erwartungswert/Varianz

Tschebyscheff-Ungleichung

$P(|X-\mathbb{E}X| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$.

Erwartungswert

(definiert, falls $\mathbb{E}|X|<\infty$)

stetig:

$\mathbb{E}X = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_X(x)\,dx$

$\mathbb{E}g(X) = \int_{\mathbb{R}} g(x) \cdot f_X(x)\,dx$

diskret:

$\mathbb{E}X = \sum_{k \in \Omega^X} k \cdot P(X=k)$

$\mathbb{E}g(X) = \sum_{k \in \Omega^X} g(k) \cdot P(X=k)$

Eigenschaften:

- Monotonie: $(X \geq Y \Rightarrow \mathbb{E}X \geq \mathbb{E}Y)$
- Linearität: $(\mathbb{E}[a \cdot X + b \cdot Y] = a \cdot \mathbb{E}X + b \cdot \mathbb{E}Y)$
- Konstanten: $(\mathbb{E}[c] = c$ für $c \in \mathbb{R})$

Im Falle X, Y stoch. unabh.

- $\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$
- $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$
- $Kov(X,Y) = 0$, $\rho(X,Y) = 0$.

Standardabweichung

$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$

Varianz

(definiert, falls $\mathbb{E}(X^2)<\infty$)

Maß für Streuung einer Zufallsvariable um EW.

$Var(X) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}X)^2]$

$= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}X)^2$

Kovarianz

(definiert, falls $\mathbb{E}[X^2], \mathbb{E}[Y^2] < \infty$)

Maß für Abhängigkeit zweier Zufallsvariablen X, Y

$Kov(X,Y) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}X) \cdot (Y-\mathbb{E}Y)]$

$= \mathbb{E}[X \cdot Y] - \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$

Korrelationskoeff.

$\rho(X,Y) = \frac{Kov(X,Y)}{\sqrt{Var(X) \cdot Var(Y)}}$

entspricht „Norm²":

- Definitheit: $Var(X) \geq 0$,

  $Var(X) = 0 \Leftrightarrow X = \mathbb{E}X$ P-f.s.

  $\Leftrightarrow X$ ist konstant.

- Homogenität:

  $Var(a \cdot X) = a^2 \cdot Var(X)$

Zusammenhang:

„Cauchy-Schwarz-Ungl."

$|Kov(X,Y)| \leq \sqrt{Var(X)} \cdot \sqrt{Var(Y)}$

$\Leftrightarrow |\rho(X,Y)| \leq 1$

und Gleichheit genau dann, wenn X, Y linear abhängig:

$\rho(X,Y) = \pm 1 \Leftrightarrow X = a \cdot Y + b$

$(a, b \in \mathbb{R})$.

entspricht „Skalarprodukt":

- Positive Definitheit:

  $Kov(X,X) = Var(X) \geq 0$,

  $Kov(X,X) = 0 \Leftrightarrow Var(X) = 0$

  $\Leftrightarrow X$ konstant.

- Bilinearität:

  $Kov(a \cdot X + b \cdot Y, Z) = a \cdot Kov(X,Z) + b \cdot Kov(Y,Z)$

- Symmetrie:

  $Kov(X,Y) = Kov(Y,X)$.